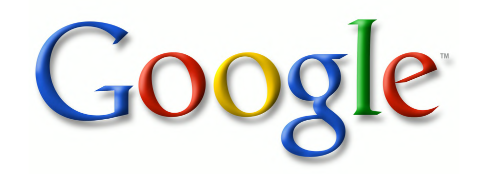


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

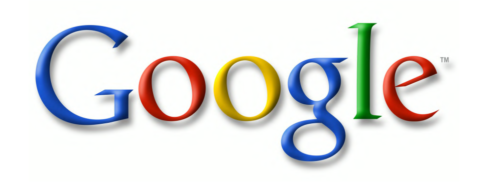
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

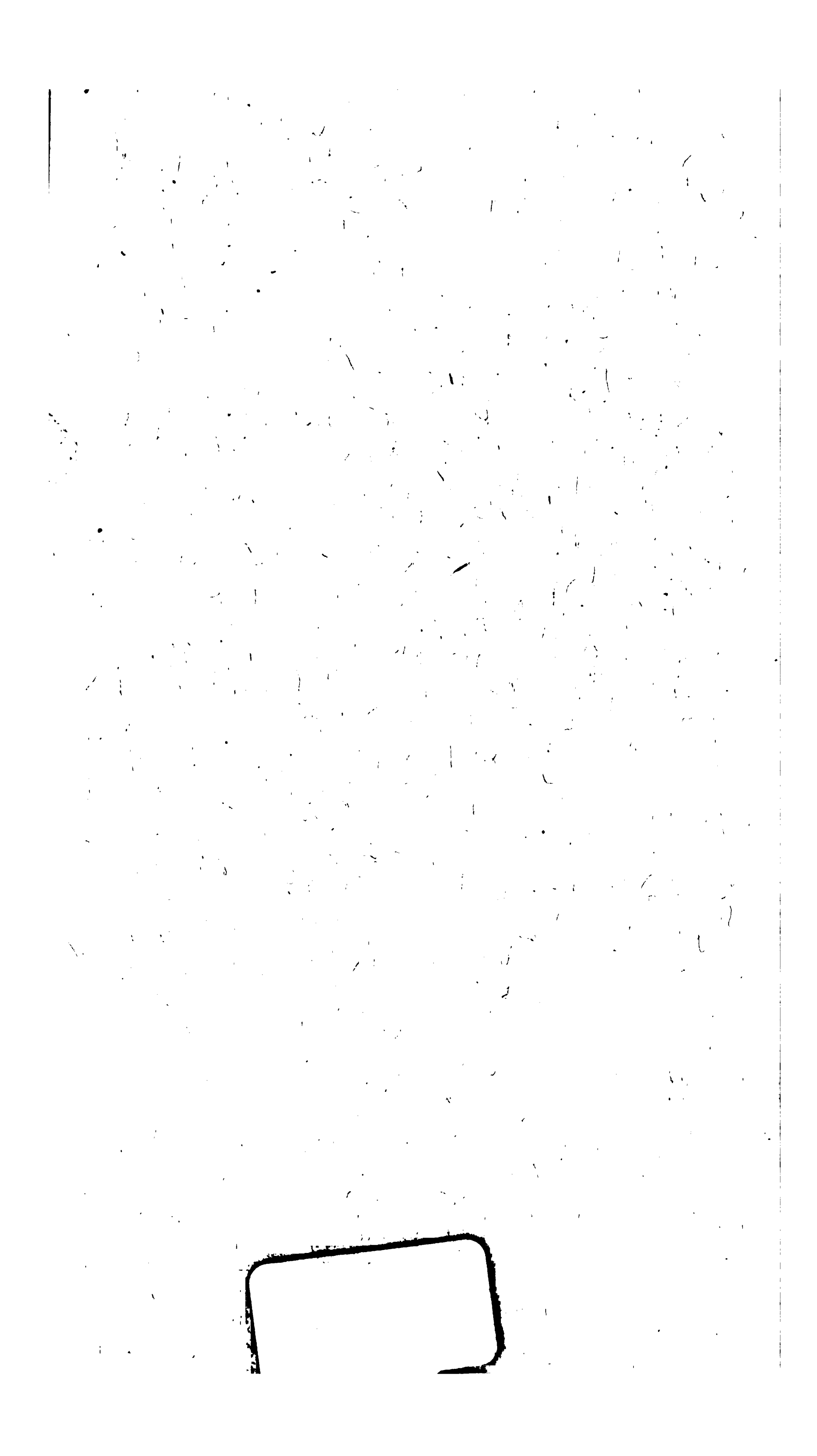
Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

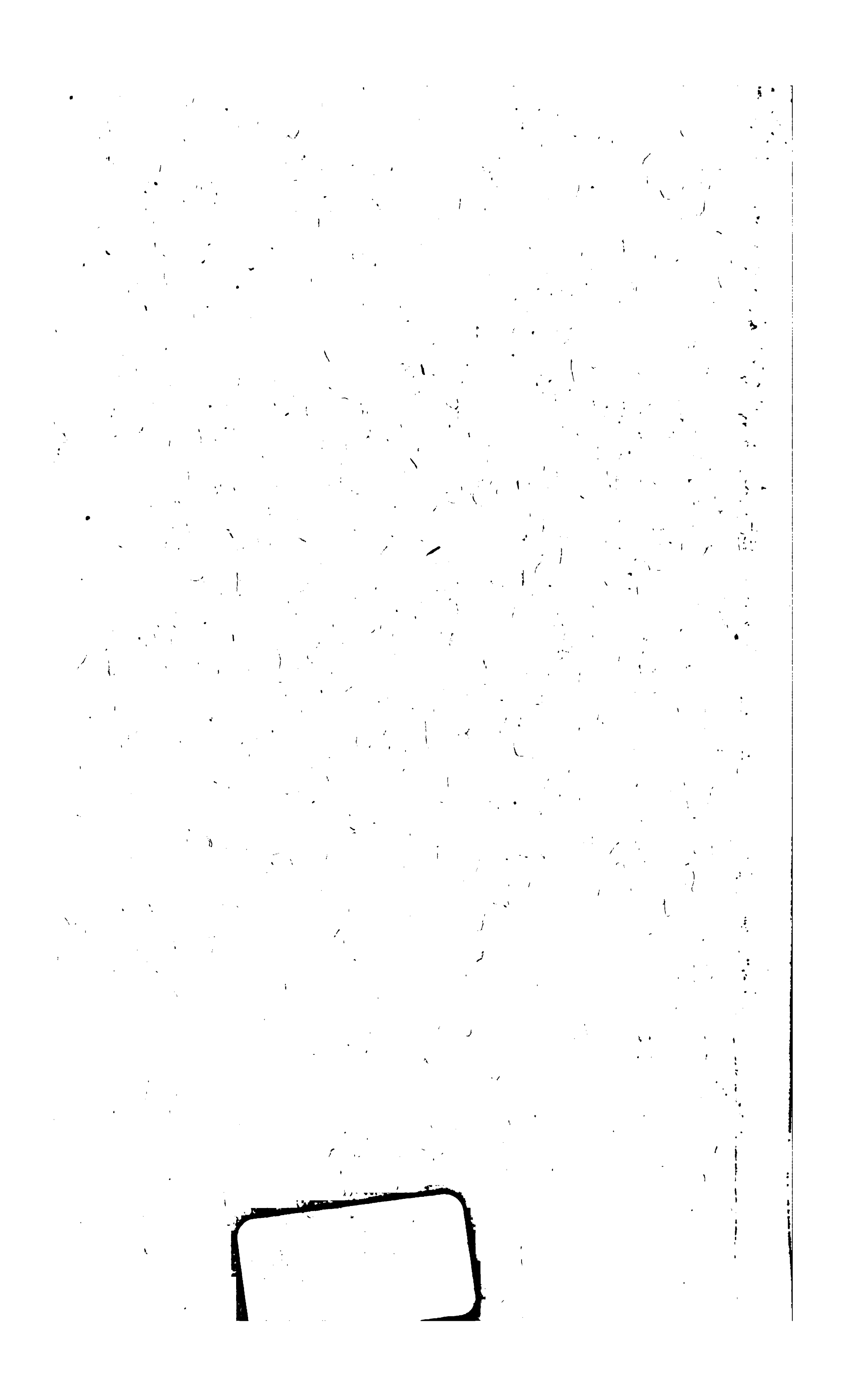
À propos du service Google Recherche de Livres

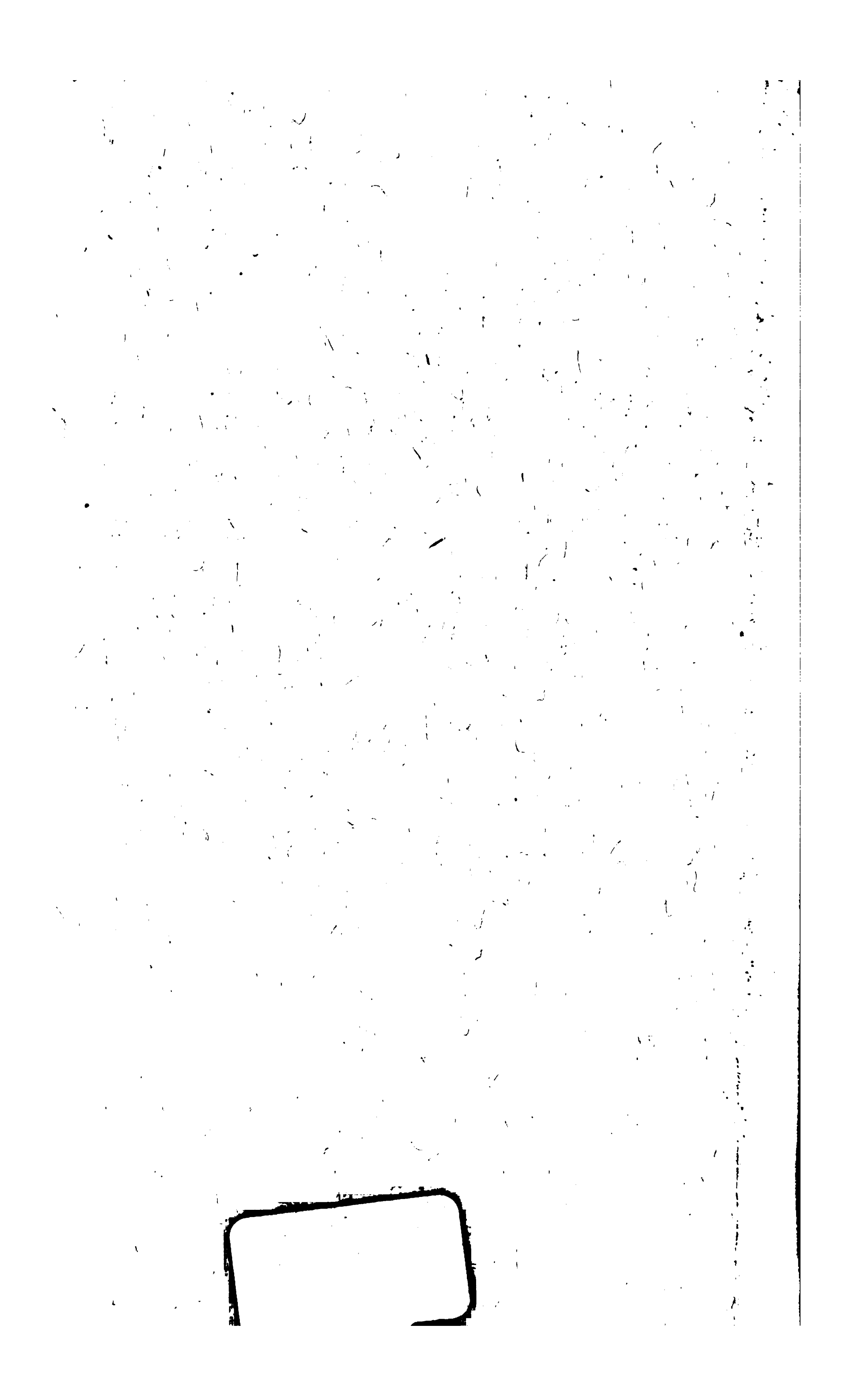
En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909444 3










Mutel
OGD

COURS

D'ALGÈBRE.

Propriété.

Ouvrages du même auteur.

LIBRAIRIE CLASSIQUE DE PERISSE FRÈRES.

MATHÉMATIQUES.

COURS D'ARITHMÉTIQUE à l'usage des aspirants à l'École Polytechnique. Un vol. in-8°. dixième édition. Ouvrage adopté et recommandé par l'Université. Prix : 3 fr.

COURS DE GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMÉTRIE à l'usage des aspirants à l'École Polytechnique. Un vol. in-8°, avec planches. Cinquième édition. Ouvrage adopté et recommandé par l'Université. Prix : 5 fr.

COURS D'ALGÈBRE à l'usage des aspirants à l'École Polytechnique. Un vol. in-8°. Deuxième édition. Ouvrage adopté et recommandé par l'Université. Prix : 6 fr.

ÉLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE à l'usage des écoles primaires, par Mademoiselle Laure Mutel. Un vol. in-12. Ouvrage adopté et recommandé par l'Université. Prix : 1 fr. 50 c.

ÉLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE à l'usage des jeunes personnes, par Mademoiselle Laure Mutel. Un vol. in-12. Ouvrage adopté et recommandé par l'Université. Prix : 1 fr. 50 c.

ASTRONOMIE.

ÉLÉMENTS D'ASTRONOMIE ou Cosmographie des Écoles primaires. Un vol. in-12, avec planches. Ouvrage adopté et recommandé par l'Université. Prix : 1 fr. 75 c.

ÉLÉMENTS D'ASTRONOMIE ou Cosmographie des jeunes personnes. Un vol. in-12, avec planches. Ouvrage adopté et recommandé par l'Université. Prix : 1 fr. 75 c.

TRAITÉ D'ASTRONOMIE à l'usage des gens du monde. Un vol. in-8°, avec planches. Deuxième édition. Prix : 7 fr.

SYSTÈME DE L'UNIVERS ou Études sur l'Astronomie. Première partie, Cours de Cosmographie rédigé selon le programme de l'Université. Un vol. in-8°, avec planches. Deuxième édition. Ouvrage adopté et recommandé par l'Université. Prix : 4 fr.

SYSTÈME DE L'UNIVERS ou Études sur l'Astronomie. Deuxième partie, Complément du Cours de Cosmographie. Un vol. in-8°, avec planches. prix : 5 fr.

BOTANIQUE.

FLORE DU DAUPHINÉ. Deux vol. gr. in-12, avec planches. Prix : 10 fr.

FLORE FRANÇAISE, destinée aux herborisations. Quatre vol. in-18, avec un atlas oblong de 650 figures. Prix : 32 fr.

PREMIER MÉMOIRE SUR LES ORCHIDÉES. Brochure in-8°, avec planches. Prix : 2 fr.

Sous presse :

SECOND MÉMOIRE SUR LES ORCHIDÉES, contenant 65 espèces exotiques toutes figurées. Un vol. in-4°.

NOTA. On trouve aussi les ouvrages ci-dessus aux adresses suivantes :

MATHÉMATIQUES, Bachelier, quai des Augustins, 55.
BOTANIQUE, Baillière, rue de l'École-de-Médecine, 13 bis
LE TRAITÉ D'ASTRONOMIE, Aimé André, rue Christine, 1.

COURS

D'ALGÈBRE

A L'USAGE

DES ASPIRANTS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

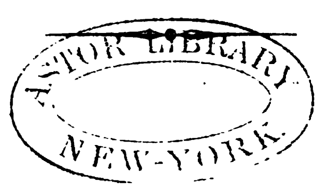
ET DES ÉCOLES D'ARTILLERIE ET DE MARINE,

PAR A. MUTEL,

CAPITAINE-COMMANDANT D'ARTILLERIE, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR,
MEMBRE DE PLUSIEURS ACADÉMIES ET SOCIÉTÉS NATIONALES.

Deuxième Edition.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ.



A PARIS,
CHEZ JACQUES LECOFFRE ET Cie, LIBRAIRES,
RUE DU VIEUX-COLOMBIER, 29.
CI-DEVANT RUE DU POT DE FER SAINT-SULPICE, 8.

1848.



A

M. POINSOT,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU CONSEIL ROYAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.

Hommage de respect, de reconnaissance et de vénération,

Par son très-humble et très-obéissant serviteur
le capitaine d'artillerie

MUTEL.

Paris, le 1er septembre 1842.

AVERTISSEMENT.

Ces Éléments sont divisés en deux parties, subdivisées chacune en quatre chapitres. La première, suffisante pour l'admission à un certain nombre d'Écoles du gouvernement, contient le calcul algébrique et la résolution des équations du premier et du second degré. La seconde partie contient le calcul des puissances et des racines d'un degré quelconque, des expressions imaginaires, des fractions continues, des logarithmes, la théorie générale des équations et la résolution des équations numériques. L'ouvrage est terminé par un appendice en deux chapitres, qui ne sont pas exigés pour l'admission à l'École Polytechnique, et qui contiennent, l'un la

théorie des fonctions symétriques, l'autre la théorie et les principales applications des séries.

Dans cette nouvelle édition, j'ai corrigé avec soin plusieurs erreurs qui s'étaient glissées dans la première, et j'ai traité la théorie des quantités négatives sous un point de vue plus philosophique.

A. MUTEL.

TABLE

PAR ORDRE DE MATIÈRES.

N. B. On a marqué d'une étoile les articles qui ne sont point exigés pour l'admission à l'École Polytechnique.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL ALGÉBRIQUE. — ÉQUATIONS DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER.

INTRODUCTION — CALCUL ALGÉBRIQUE.

SECTION PREMIÈRE. — *Introduction.* — Nos 1—14.

SECTION II. — *Calcul algébrique.* — Nos 14—62.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

SECTION I. — *Résolution des équations du premier degré.* — Nos 62—84.

SECTION II. — *Résolution de plusieurs équations du premier degré en nombre égal aux inconnues.* — Nos 64—111.

SECTION III. — *Équations indéterminées du premier degré.* Nos 111—126.

CHAPITRE III.

PUISSANCES ET RACINES DU SECOND DEGRÉ. — Nos 126—137.

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

SECTION I. — *Équations du second degré à une inconnue.* Nos 137—150.

SECTION II — *Équations qui se ramènent à celles du second degré à une inconnue.* — Nos 150—162.

DEUXIÈME PARTIE.

PUISSANCES, RACINES ET ÉQUATIONS D'UN DEGRÉ QUELCONQUE.

CHAPITRE V.

PUISSANCES ET RACINES DES QUANTITÉS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES. CALCUL DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES ET DES RADICAUX.

SECTION I. — *Puissances et racines des quantités numériques et algébriques.* — Nos 161—191.

SECTION II. — *Des expressions imaginaires.* — Nos 191—201.

SECTION III. — *Calcul des radicaux arithmétiques et des exposants fractionnaires.* — Nos 201—210.

SECTION IV. — *Des radicaux algébriques.* — Nos 210—221

CHAPITRE VI.

FRACTIONS CONTINUES. PROGRESSIONS. LOGARITHMES. PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

CHAPITRE VII.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS A UNE ET A PLUSIEURS INCONNUES.

SECTION II. — *Transformation des équations. Polynômes dérivés. Racines égales.* — Nos 293—319.

SECTION III. — *De l'élimination et de ses principales applications.* Nos 319—342.

SECTION IV. — *Diviseurs du second degré. Abaissement des équations. Équations réciproques et binômes.* — Nos 342—359.

CHAPITRE VIII.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

SECTION I. — *Racines commensurables.* — Nos 359—371.

SECTION II. — *Séparation des racines incommensurables.* Nos 371—396.

SECTION III. — *Approximation des racines.* — Nos 396—405.

SECTION IV. — *Racines imaginaires.* — Nos 405—409.

*APPENDICE.

*CHAPITRE IX.

FONCTIONS SYMÉTRIQUES. — Nos 409—416.

CHAPITRE X.

SÉRIES.

SECTION I. — *Notions sur les séries. Théorème sur leur convergence Binôme pour tous les cas. Séries exponentielles et logarithmiques.*
Nos 416—432.

FIN DE LA TABLE.

COURS D'ALGÈBRE.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL ALGÉBRIQUE.—ÉQUATIONS DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER.

INTRODUCTION. — CALCUL ALGÉBRIQUE.

SECTION PREMIÈRE.

INTRODUCTION.

§ 1. *Objet de l'Algèbre.*

1. L'*Algèbre* est une science qui a pour but de ramener à des règles générales la résolution de presque toutes les questions qu'on peut proposer sur les quantités (*). Ces règles, pour être générales, ne doivent pas dépendre des valeurs particulières des quantités que l'on considère, mais de la nature de chaque question, et doivent toujours être les mêmes pour toutes les questions de même espèce. L'*énoncé* de la question indique les relations qui doivent exister entre les quantités connues, qu'on appelle les *données*, et les quantités inconnues, La *solution* de la question est la détermination des inconnues, faite de manière à satisfaire à ces conditions.

L'Arithmétique donne des règles pour trouver certains résultats, mais ces résultats ne peuvent pas fournir de règles. L'Algèbre doit remplir ces deux objets, et, pour y parvenir, elle représente les quantités par des signes généraux, qui, n'ayant aucune relation plus particulière avec un nombre qu'a-

(*) Voyez, à la fin de notre Arithmétique, l'introduction à l'étude de l'Algèbre. Ici nous avons à dessein répété les mêmes expressions pour la facilité des élèves qui suivent nos ouvrages.

vec un autre, ne représentent que ce que l'on veut ou l'on convient de leur faire représenter. Ces signes, toujours présents aux yeux pendant toute la suite d'un calcul, conservent, pour ainsi dire, l'empreinte des opérations par lesquelles ils passent, ou du moins offrent dans les résultats de ces opérations les traces de la route qu'on doit tenir pour arriver au même but par les moyens les plus simples. Le tableau des opérations à effectuer, pour arriver au résultat que l'on cherche, s'appelle *formule*.

2. Il est plusieurs questions qu'on peut résoudre seulement à l'aide du raisonnement, et, en partant de l'énoncé, on arrive, après une suite de phrases équivalentes, à une dernière ainsi conçue : *Le nombre inconnu est égal à une certaine combinaison des nombres connus.*

Proposons-nous, pour exemple, le problème suivant :

Partager un nombre donné 57 *en deux parties, telles que l'une ait sur l'autre un excès donné* 25 ?

D'après l'énoncé, la plus grande partie devant égaler la plus petite, plus l'excès donné 25, et les deux parties devant former le nombre 57, il est clair que 2 fois la plus petite plus 25 égaleront 57, ou, ce qui revient au même, 2 fois la plus petite partie égaleront 57 moins 25; donc la plus petite égalera la moitié de 57 moins la moitié de 25, ou la moitié de la différence entre 57 et 25, c'est-à-dire la moitié de 32, ou enfin 16. Ainsi les deux parties inconnues sont l'une 16, et l'autre 16 plus 25 ou 41.

3. Si maintenant on supprime, dans la question précédente, les nombres 57 et 25 qui la particularisent, on aura l'énoncé suivant, qui est général :

Partager une quantité ou un nombre donné en deux parties, telles que l'une ait sur l'autre un excès donné?

Le même raisonnement employé ci-dessus conduit aux opérations qu'il faut effectuer sur les quantités données, pour en déduire les parties inconnues. Car on dira de même : la plus grande partie devant égaler la plus petite plus l'excès donné, deux fois la plus petite plus l'excès donné reproduiront la quantité donnée; ou bien deux fois la plus petite partie égale-

ront la quantité donnée diminuée de l'excès donné. Donc enfin la plus petite partie égalera la moitié de la quantité donnée moins la moitié de l'excès donné, ou la moitié de la différence entre la quantité donnée et l'excès donné. Connaissant la plus petite partie, en lui ajoutant l'excès donné on obtiendra la plus grande, qui égalera donc la moitié de la quantité donnée moins la moitié de l'excès donné plus l'excès donné, ou, ce qui est la même chose, la moitié de la quantité donnée plus la moitié de l'excès donné, ou enfin la moitié de la somme faite de la quantité donnée et de l'excès donné.

4. Dans l'exemple ci-dessus, quoique fort simple, on voit fréquemment revenir les expressions suivantes : la quantité donnée, l'excès donné, la plus grande partie, la plus petite partie, égalera, ajoutée à, diminuée de, etc., qui ralentissent singulièrement la marche du raisonnement ; et en essayant un exemple un peu plus compliqué, comme de partager une quantité donnée en 3, 4 et 5,..... parties ayant l'une sur l'autre un excès donné, ou bien des exemples exigeant l'emploi de la multiplication et de la division, il résulterait du retour et de l'enchaînement des mêmes expressions, ou de plusieurs autres analogues, une complication telle qu'il serait très-difficile de se reconnaître dans ce dédale d'opérations à effectuer pour déterminer les quantités inconnues.

Pour éviter ces inconvénients majeurs, et en même temps pour abréger, on s'est accordé à représenter par des signes, que nous avons déjà fait connaître en Arithmétique (n°s 8, 16, 26, 97, 98), les opérations auxquelles on peut soumettre les quantités et les relations de grandeur ou d'égalité des quantités entre elles. On est aussi convenu de représenter les quantités connues, ou les données de la question, par les premières lettres de l'alphabet, a, b, c,..... et les quantités inconnues, ou que l'on cherche, par les dernières lettres x, y, z..... En outre, pour désigner plusieurs quantités, soit connues, soit inconnues, différentes, mais analogues entre elles, on emploie, pour ne pas perdre de vue leur analogie, les mêmes lettres prises dans différents caractères ou alphabets, ou bien dans le même caractère, mais modifiées par des accents supérieurs pla-

cés à droite, ce qui donne; par exemple, a', a'', a''', x', x'', x''',.... qu'on prononce *a prime*, *a seconde*, *a tierce*....

De plus, lorsque dans le cours d'un calcul une lettre a, représentant une quantité quelconque, est ajoutée plusieurs fois à elle-même, on n'écrit la lettre qu'une fois, et l'on place à sa gauche un chiffre appelé *coefficient*, qui marque combien de fois la lettre doit être répétée. Ainsi $a+a+a$ se remplace par $3a$, et le cofficient 3 indique que la lettre a doit être répétée trois fois, c'est-à-dire multipliée par 3. Le coefficient peut être fractionnaire comme dans $\frac{2}{3}a$, ou même une lettre, comme dans l'expression ma, où m est le coefficient de a. Toute lettre a, écrite seule, a pour coefficient 1, qui est toujours sous-entendu.

Enfin, lorsqu'une lettre a, représentant une quantité quelconque, est multipliée une ou plusieurs fois par elle-même, on ne l'écrit qu'une fois, et l'on place au-dessus et à droite un petit chiffre nommé *exposant* (voyez notre Arith. n° 97), indiquant combien de fois la lettre entre comme facteur dans le produit, qui prend alors le nom de *puissance*. L'exposant marque le *degré* de la puissance. Toute quantité algébrique, telle que a, écrite sans exposant, est à la première puissance et a pour exposant 1, qui est toujours sous-entendu. a^2 ou la deuxième puissance de a se nomme le *carré* de a, et a^3 ou la troisième puissance de a se nomme le *cube* de a. L'exposant peut être une lettre, comme dans l'expression a^m.

Toute quantité, qui, étant élevée à une certaine puissance, reproduit une quantité donnée, s'appelle la *racine* de cette dernière. La racine est dite deuxième ou *carrée*, troisième ou *cubique*, quatrième,.... selon qu'il faut l'élever à la deuxième, troisième, quatrième.... puissance, pour reproduire la quantité donnée. En général, lorsqu'une quantité est affectée d'un exposant, cette quantité, prise sans son exposant, s'appelle *racine*. L'*extraction* de racine (Arith. n° 98) s'indique par le signe $\sqrt{\ }$, nommé *radical*, dans l'ouverture duquel on place le chiffre *indice* de la racine, excepté pour la racine carrée, l'indice 2 ne s'écrivant pas et restant sous-entendu.

C'est de l'emploi et de la combinaison de tous ces signes abstraits qu'est résultée l'Algèbre.

§ 2. *Tableau des notations algébriques.*

5. Nous donnons l'ensemble des notations algébriques dans le tableau suivant, avec lequel nous engageons fortement les élèves à bien se familiariser. La colonne à gauche offre, pour exemple de chaque signe, une expression algébrique très-simple, dont la valeur est indiquée en regard dans la colonne à droite.

Nous indiquons le signe $\times$ parmi ceux de la multiplication, mais, d'après les motifs exposés dans l'avertissement de notre Arithmétique, nous n'en avons pas fait usage.

EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES.	VALEURS ET OBSERVATIONS.	
		Valeurs particulières pour $a=4$, $b=3$, $c=2$.
$a+b$	a plus b	$a+b=4+3=7$
$a-b$	a moins b	$a-b=4-3=1$
$a\pm b$	a plus ou moins b	$a\pm b=4\pm 3=7$ ou 1
$a.b$, $a\times b$, ab	a multiplié par b	$a.b=12$
$a(b+c)$ ou $a\times(b+c)$	a multiplié par $b+c$	$a(b+c)=20$
$(a+b)\ (b+c)$ ...... ou $(a+b)\times(b+c)$	$a+b$ multiplié par $b+c$	$(a+b)\ (b+c)=35$
$\frac{a}{b}$ ou $a : b$	a divisé par b	$\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$
$a=b$	a égale b. — L'ensemble $a=b$ se nomme *égalité* ou *équation*. La partie à gauche du signe $=$ se nomme le *premier membre*, la partie à droite est le *second membre*.	
$a>b$	a plus grand que b.	
$a<b$	a plus petit que b.	
$3a$	Trois a. — Le *coefficient* 3 indique que a est multiplié par 3. Si $a=4$, $3a=12$.	
a^3	a exposant 3, ou simplement a trois. L'*exposant* 3 indique que a est à la troisième puissance ou au cube, c'est-à-dire est multiplié deux fois de suite par lui-même, ou enfin est trois fois facteur. Si $a=4$, $a^3=64$.	
$\sqrt[2]{a}$, $\sqrt{a}$	Racine carrée de a. Si $a=9$, $\sqrt{a}=\sqrt{9}=3$.	
$\sqrt[3]{a}$	Racine cubique de a. Si $a=8$, $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{8}=2$.	
$\sqrt[4]{a}$ et $\sqrt[m]{a}$	Racine quatrième et racine m^e de a. — Le nombre 4 et la lettre m sont les *indices* du signe radical.	
$3ab^2-4ab^3+bc^3$ ...	Expression *littérale* ou *algébrique*. — Cette expression est composée de trois autres expressions ou quantités littérales ou algébriques, unies par les signes $+$ et $-$, et dont chacune s'appelle *terme*. Le terme écrit le premier est censé avoir le signe $+$. Un terme est dit *positif* ou *négatif*, selon qu'il est précédé du signe $+$ ou du signe $-$. Le *degré* d'un terme est la somme des exposants des lettres qui s'y trouvent. Le terme $3ab^2$ est du 3e degré, $4ab^3$ est du 4e, et abc^3 du 5e.	

EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES.	VALEURS ET OBSERVATIONS.
$4a^3b$............	*Monôme* ou *quantité incomplexe.* — C'est une expression algébrique à un seul terme, ou composée de facteurs sans interposition des signes + et —.
$4a^3b+ma^2b-bc^4$...	*Polynôme* ou *quantité complexe.* — C'est une expression algébrique à plusieurs termes. Le polynôme de 2, 3, 4, 5 termes s'appelle en particulier *binôme, trinôme, quatrinôme, quinôme.* Si dans le polynôme cité on fait $a=4$, $b=3$, $c=2$ et $m=5$, sa valeur numérique devient $4.64.3+5.16.3-3.16=768+240-48=960$ (voyez ci-après, n° 29).
$3ab^2+4a^3+a^2b$....	Polynôme *homogène.* — C'est un polynôme dont tous les termes sont du même degré, qui est aussi le degré du polynôme. Le polynôme pris pour exemple est du 3ᵉ degré.
$4a^3b$, ma^3b.......	Termes *semblables.* — On nomme ainsi les termes contenant les mêmes lettres respectivement affectées des mêmes exposants; ils sont susceptibles de réduction (27). Par exemple, $4a^3b+5a^3b=9a^3b$, $4a^3b+ma^3b=(4+m)a^3b$.
38, a^3b, $a+bc^2$....	Quantités *entières.* — Elles ne contiennent ni radical ni dénominateur.
$\frac{5}{6}$, $4a^2$, $\frac{3}{4}a+\frac{b}{c}$....	Quantités *rationnelles* ou *commensurables.* — On nomme ainsi les quantités ne contenant pas de radical, ou au moins qu'on ne puisse faire disparaître.
$3\sqrt{a+b}$, $2a+\frac{b}{\sqrt{2}}$..	Quantités *irrationnelles* ou *incommensurables.* — Ce sont les quantités contenant des radicaux qu'on ne peut faire disparaître, et n'ayant, par conséquent, aucune commune mesure avec l'unité. (Voy. notre Arith., n° 110, et notre Géom., sect. 1, prop. 2.)
$F(x)$, $f(x,y)$......	Ces notations s'énoncent *fonction* de x, *fonction* de x et y, et désignent la manière particulière dont une expression est composée en x, ou en x et y, comme $4x^2+6\sqrt{x}$, $y^2+3\sqrt{xy}$. Il faut bien faire attention que $F(x)$ n'indique pas la multiplication de la lettre F par x, la lettre F est seulement employée ici comme abréviation du mot *fonction.* On doit employer diverses lettres, comme F, f, φ, F',... pour des fonctions différentes considérées simultanément.
$F(x)$, $F(y)$........	Ces notations désignent deux *fonctions semblables,* ou deux expressions formées de la même manière, l'une en x, l'autre en y, comme ax^2-bx+c, ay^2-by+c. Si donc, dans le cours d'un calcul ou d'une explication, on emploie la notation $F(x)$ pour désigner une certaine fonction particulière de x, la notation $F(a)$ représente essentiellement ce que devient $F(x)$ quand on y remplace x par a; $F(y+4)$, $F(2)$ représentent ce que devient la même fonction quand on y remplace x par $y+4$ ou par 2. Si, par exemple, $F(x)$ représente $3x^2+4x+5$, et qu'on y fasse $x=2$, la fonction devient 25. De même, si $F(x,y)$ représente une certaine fonction de x et de y, $F(x,3)$ désigne ce que devient la fonction précédente quand on y fait $y=3$, sans donner à x de valeur particulière; par exemple, si $F(x,y)=3x^2+5yx+6y^2+3$, en faisant $y=3$, elle devient $3x^2+15x+57$, tandis que si l'on fait à la fois $y=3$, $x=2$, la même fonction devient 99.

§ 3. *Applications des notations algébriques. Formules.*

6. Reprenons maintenant l'exemple traité plus haut (2), et représentons la plus petite partie par x, la plus grande sera $x+25$. La somme des deux parties devant égaler 57, on aura $x+(x+25)=57$. Or, un tout étant composé de plusieurs parties, il est évident que dans quelque ordre qu'on ajoute ces parties, pourvu qu'on les prenne toutes, on reproduira le tout. Par conséquent, $x+x+25$ égalera, soit $x+(x+25)$, soit $2x+25$. On aura donc $2x+25=57$. Mais si de deux quantités égales on retranche un même nombre 25, les restes seront égaux; donc $2x+25-25=57-25$, ou, en réduisant, $2x=32$. Divisant les quantités égales $2x$ et 32 par un même nombre 2, les quotients seront égaux; donc $x=16$. Ajoutant 25 à 16 on a 41 pour la valeur de la plus grande partie. En effet, $41+16=57$.

7. Nous venons de traiter la question proposée d'une manière tout arithmétique : aussi le résultat obtenu ne nous laisse apercevoir aucune trace des opérations qu'il nous a fallu faire pour y parvenir. Mais il n'en sera pas de même si nous traitons la même question avec son énoncé général (3). En effet, représentons par a le nombre à partager, par b l'excès donné, et par x la plus petite partie; la plus grande sera $x+b$. Leur somme devant égaler a, nous aurons $x+x+b=a$, et successivement $2x+b=a$, $2x=a-b$, $x=\frac{a-b}{2}$. Ce résultat, qu'on appelle formule, traduit en langage ordinaire, nous apprend, comme nous l'avons déjà trouvé par le raisonnement, que *pour avoir la plus petite partie, il faut retrancher l'excès donné du nombre à partager et prendre la moitié de la différence.*

Ayant déterminé la plus petite partie, on trouvera la plus grande en lui ajoutant l'excès b; mais on peut l'obtenir directement, et c'est là un autre avantage du procédé algébrique : car la plus petite partie étant $\frac{a-b}{2}$, la plus grande sera $\frac{a-b}{2}+b$, ou, ce qui est la même chose, $\frac{a-2b+2b}{2}$, c'est-à-dire $\frac{a+b}{2}$.

Cette expression, traduite en langage ordinaire, montre que *pour avoir la plus grande partie, il faut ajouter la quantité donnée à l'excès donné et prendre la moitié de la somme.*

L'une ou l'autre de ces deux règles générales, qui ne sont autre chose que l'énoncé littéral des deux formules obtenues par la combinaison des signes algébriques, d'après les conditions de la question, donne évidemment la solution de toutes les questions semblables.

Ainsi, pour résoudre par ces formules la question particulière du n° 2, où le nombre à partager était 57 et l'excès donné 25, on dira :

La différence de 57 à 25 est 32, la moitié de 32 est 16, qui est la valeur de la plus petite partie.

La somme de 57 et 25 est 82, la moitié de 82 est 41, qui est la valeur de la plus grande partie.

La question précédente peut encore se poser ainsi : *Trouver deux quantités dont la somme soit une quantité donnée et dont la différence soit une quantité donnée;* ou bien, *trouver deux quantités dont on connaît la somme et la différence.*

Représentons la somme donnée par a, la différence donnée par b, et la plus petite quantité par x; la plus grande sera $x+b$, leur somme, qui est $x+x+b$, devant égaler a, on aura $2x+b=a$, d'où $x=\frac{a-b}{2}$. La solution conduit donc aux deux formules obtenues ci-dessus, et par suite aux deux règles qu'on en a déduites.

8. Proposons-nous maintenant le problème suivant :

Partager une quantité donnée en trois parties, telles que la plus grande ait sur la moyenne un excès donné, et que la moyenne ait aussi sur la plus petite un excès donné.

Représentons par a la quantité à partager, par b l'excès de la plus grande sur la moyenne, et par c l'excès de la moyenne sur la plus petite. Désignons la plus petite par... x

la moyenne sera...... $x+c$

et la plus grande..... $x+c+b$;

comme la somme de ces trois parties ou.... $3x+2c+b$

doit donner la quantité à partager a, on aura donc $3x+2c+b=a$; retranchant $2c$ et b des deux membres, on a $3x=a-b-2c$, d'où, en divisant les deux membres par 3, $x=\frac{a-b-2c}{3}$.

La partie moyenne, égalant la plus petite augmentée d'une quantité c, sera donc $\frac{a-b-2c}{3}+c$ ou $\frac{a-b-2c+3c}{3}$, ou enfin $\frac{a-b+c}{3}$; de même, la plus grande partie, égalant la moyenne augmentée d'une quantité b, sera

$$\frac{a-b+c}{3}+b=\frac{a-b+c+3b}{3}=\frac{a+b+c}{3}.$$

La première formule traduite en langage ordinaire conduit à la règle suivante :

Pour déterminer la plus petite partie, il faut retrancher de la quantité à partager l'excès donné de la plus grande sur la moyenne, plus deux fois l'excès donné de la moyenne sur la plus petite, et diviser ce dernier reste par 3. *Le quotient sera la plus petite partie cherchée.*

Les deux autres formules donnent des règles analogues.

9. Prenons encore la question suivante (dont celle que nous avons traitée, Arith. n° 204, est un cas particulier) :

Partager une quantité donnée en trois parties, ayant entre elles les mêmes rapports que les nombres m, n, p.

Représentons par a la quantité à partager supposée entière, et par x la plus grande partie. Soit, en outre, $m>n$ et $n>p$,

nous aurons $m:n::x:$ la moyenne $=\frac{nx}{m}$,

$m:p::x:$ la plus petite $=\frac{px}{m}$.

La somme des trois parties devant reproduire le nombre à partager a, on a donc

$$n+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a.$$

Convertissant a et x en fractions dont le dénominateur soit

m, il vient $\frac{mx+nx+px}{m}=\frac{am}{m}$, ou, en multipliant des deux côtés par m, $mx+nx+px=am$. Or, mx n'est autre chose que x répété m fois, de même nx et px indiquent les produits de x par n et par p; donc l'expression $mx+nx+px$ composée de termes semblables (5) signifie que x est répété un nombre de fois marqué par $m+n+p$, ce qui s'écrit $(m+n+p)x$; on a donc $(m+n+p)x=am$, d'où, en divisant des deux côtés par $m+n+p$, l'on déduit $x=\frac{am}{m+n+p}$.

x est donc une quatrième proportionnelle aux trois quantités connues a, m, $m+n+p$, ce qui donne la solution de toutes les questions semblables. Faisant $a=240$, $m=6$, $n=5$, $p=4$, on trouve $n=96$ pour la plus grande partie, et par suite 80 et 64 pour les deux autres (voyez notre Arith. n° 204).

§ 4. *Considérations générales sur la solution des questions.*

10. On voit que la solution de ces diverses questions se compose de deux parties bien distinctes. L'une consiste à exprimer algébriquement les relations établies par l'énoncé entre les quantités connues et les quantités inconnues, ce qui mène à égaler entre elles certaines expressions, ou à *mettre*, comme on dit, *le problème en équation;* l'autre consiste à déduire de ces équations la valeur des quantités inconnues, au moyen de procédés mathématiques que nous exposerons plus tard, et qui constituent ce qu'on appelle *la résolution des équations.*

On ne peut prescrire aucune règle précise pour effectuer la première partie de la solution, c'est-à-dire la *mise en équation;* nous recommanderons seulement de représenter les quantités inconnues par les dernières lettres de l'alphabet x, y, z,.... en les réduisant au plus petit nombre possible, et d'indiquer à l'aide des signes algébriques les opérations qu'il faudrait effectuer pour vérifier si les inconnues, supposées déterminées et remplacées par leurs valeurs, satisfont aux conditions du problème.

Les relations, indiquées par la question, sont plus ou moins

faciles à saisir et à traduire en langage algébrique; aussi la mise en équation exige, en général, une certaine adresse que l'esprit acquiert seulement par la pratique.

11. L'énoncé de la question peut conduire à une équation ne renfermant qu'une inconnue, ou à plusieurs équations renfermant autant d'inconnues, et alors on dit que le problème est *déterminé*. Si l'énoncé ne peut fournir autant d'équations qu'il y a d'inconnues, le problème est indéterminé. Enfin si l'énoncé conduit à plus d'équations que d'inconnues, le problème n'est pas toujours possible. Nous verrons plus loin qu'il suffit d'avoir un nombre d'équations égal à celui des inconnues pour déterminer celles-ci; alors les équations restantes doivent être vérifiées par les valeurs des inconnues, pour que le problème soit possible. On les appelle *équations de condition*.

Les équations peuvent, aussi bien que les termes (5), être de différents degrés; et *le degré d'une équation est la somme des exposants des inconnues prise dans les termes où cette somme est la plus forte.*

Les équations du premier degré sont celles où les inconnues ne sont multipliées ni par elles-mêmes, ni entre elles, et n'entrent pas d'ailleurs en dénominateur. Telle est l'équation

$$4x+5=6x-3.$$

L'équation à une inconnue $4x^2+3x=6x^2-3$ est du second degré, parce que le plus haut exposant de x est 2; il en est de même de $6x^2+3xy=4y^2-2$, où les inconnues sont x et y. L'équation $\frac{3x^2}{x}+5x=8$ est du premier degré, parce que la même inconnue x entrant au dénominateur et au numérateur, ce terme se réduit à $3x$. Mais l'équation $\frac{3x^2}{y}=4$ est du second degré, parce que l'inconnue du dénominateur étant autre que celle du numérateur, le degré de x^2 ne peut se réduire; d'ailleurs on n'évalue le degré d'une équation qu'après avoir fait disparaître les dénominateurs contenant des inconnues.

L'équation $ax^2+bxy^2=\frac{cxy}{b}-a$ est du troisième degré.

On appelle encore particulièrement équation *algébrique*, celle dont les coefficients des inconnues sont, comme dans la précédente, des lettres ou quantités algébriques. Toute équation, au contraire, dont les coefficients des inconnues sont des nombres, est dite *numérique*.

12. Quand on a effectué la première partie de la solution d'une question à une inconnue, c'est-à-dire trouvé les expressions algébriques renfermant la quantité inconnue qu'il faut déterminer de manière à rendre ces expressions égales, en les joignant par le signe $=$, on a ce qu'on appelle une *équation*.

Lorsqu'on peut démontrer directement que deux expressions sont égales, sans donner de valeur particulière à aucune des lettres qu'elles renferment, en les joignant par le signe $=$, on a une *égalité*, comme $(x-1)(x+1)=x^2-1$. On obtient encore une égalité, lorsque dans une proportion on égale le produit des extrêmes au produit des moyens.

Enfin, deux quantités exprimées identiquement de la même manière, ou évidemment égales, donnent une *identité*, comme

$$8=8,\ x+4=x+4.$$

13. On a vu dans les questions traitées précédemment que leur solution obligeait à faire subir aux quantités algébriques certaines opérations, compositions ou décompositions. Ainsi, dans la question du n° 9, par exemple, l'expression $mx+nx+px$, qui représente le résultat de trois multiplications suivies de deux additions, a été décomposée en deux facteurs $m+n+p$ et x, dont l'ensemble indique une seule multiplication précédée de deux additions, etc. Or, les raisonnements qu'on emploie dans ces circonstances, et dans d'autres analogues, peuvent être réduits en règles au moyen desquelles on effectue sur les quantités algébriques, représentées par des lettres, les mêmes opérations que sur les nombres en Arithmétique, comme l'*addition*, la *soustraction*, etc. Mais ces opérations, comme le fait remarquer judicieusement M. Lacroix, diffèrent de celles qu'on exécute sur les nombres, en ce que leurs résultats, n'étant encore et ne pouvant être que des indications de calculs à effectuer, ne présentent réellement que des transformations des opérations primitivement indiquées, en d'autres qui

doivent produire les mêmes résultats, et dont l'écriture algébrique est plus simple ou mieux appropriée à la solution de la question qu'on a en vue.

Les règles à suivre pour exécuter ces transformations constituent le calcul algébrique dont nous allons nous occuper.

SECTION II.

CALCUL ALGÉBRIQUE.

---

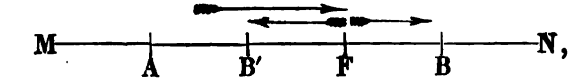
§ I. *Quantités négatives. Règles des signes.*

14. Nous venons de voir que les quantités algébriques peuvent être soumises aux mêmes opérations que les nombres. Mais ces opérations ont ici un sens bien plus étendu qu'en Arithmétique, où les nombres sont considérés seulement sous le rapport de leur grandeur absolue, et toujours regardés comme *positifs* ou ayant le signe +, tandis qu'en Algèbre on considère non-seulement la *valeur absolue* et la *proportion* des quantités soumises au calcul, mais encore le *sens* ou la *situation* de ces quantités relativement les unes aux autres.

Par exemple, si l'on a des quantités situées ou dirigées vers la droite d'un certain point fixe pris comme point de départ, et des quantités situées ou dirigées vers la gauche du même point, il faut, dans le calcul de ces quantités, tenir compte de leur *différence de situation*, et, à cet effet, on est convenu de leur donner des *signes contraires*. Ainsi, en regardant comme *positives*, ou affectées du signe +, les quantités situées à droite du point fixe, on doit considérer comme négatives, ou affectées du signe —, les quantités situées à gauche du même point. Telle est la véritable source de la distinction des quantités *positives* et *négatives*, et c'est sous ce point de vue philosophique qu'on doit les envisager dans tout le cours de l'Algèbre.

15. L'exemple suivant fera ressortir la justesse de ces consi-

dérations, et les rendra plus faciles à saisir. Concevons un mobile se mouvant le long d'une ligne droite MN



sur laquelle il a déjà parcouru, dans le sens MN, une longueur AF, représentée d'une manière absolue par a. Si le mobile, à partir du point F, continue à se mouvoir dans le même sens jusqu'en B, la longueur absolue b de FB venant s'ajouter au chemin a primitivement parcouru, la distance AB du mobile au point A sera représentée par la somme $AF + FB = a + b$. Dans ce cas, la longueur absolue b du chemin FB, qui exprime l'accroissement de la distance primitive AF, aura le signe $+$, et sera regardée comme *positive*. Mais si le mobile, une fois arrivé en F, rétrograde, vers le point A, d'une longueur FB′ égale à FB ou b, alors sa distance AB′ au point A ne sera plus représentée que par la différence $AF - FB' = a - b$. Dans ce cas, la longueur absolue b de FB′, qui exprime la diminution survenue dans la distance primitive AF, aura le signe $-$, et sera regardée comme *négative*.

Ainsi, deux longueurs, comptées à partir d'une origine commune, mais dans des *sens opposés*, comme sont ici FB et FB′ par rapport au point F, devront être introduites dans le calcul avec des *signes contraires*. On peut choisir d'abord le sens dans lequel les longueurs doivent être regardées comme *positives*, ou affectées du signe $+$; mais le choix étant fait, on devra nécessairement regarder comme *négatives*, ou affectées du signe $-$, les longueurs prises dans le sens opposé.

Réciproquement, si l'on compte dans un certain sens les longueurs affectées du signe $+$, on devra compter dans le sens opposé les longueurs affectées du signe $-$. C'est ce que nous aurons souvent l'occasion de vérifier dans le cours de l'ouvrage (n[os] 69, 81, etc.).

Le thermomètre offre une application fréquente de ces principes. Car dans tous les calculs relatifs à la détermination de la température moyenne, etc., on regarde les degrés *au-dessus*

de zéro comme *positifs*, et les degrés *au-dessous* de zéro comme *négatifs*. Le point zéro est leur point de départ ou leur origine commune.

16. On voit que les mots *positifs* et *négatifs*, et, par conséquent, les signes + et — qui les représentent, doivent être considérés comme de véritables adjectifs *déterminatifs*, puisqu'ils déterminent le sens dans lequel on doit prendre les quantités qu'ils affectent. On est encore convenu que le signe +, mis devant une quantité, ne change pas le sens dans lequel elle est prise, et que le signe —, mis devant une quantité, change le sens dans lequel on doit la prendre, c'est-à-dire qu'une certaine quantité, affectée du signe —, représente une quantité de même valeur absolue, mais prise dans un sens contraire du sens primitif ou ordinaire, ou comptée dans un sens opposé.

Les quantités qui ne sont précédées d'aucun signe, sont supposées avoir le signe +, et, par conséquent, censées positives.

17. La plupart des auteurs regardent les quantités *négatives* comme provenant de soustractions qu'on ne peut effectuer entièrement, la quantité à soustraire surpassant la quantité dont on devrait la retrancher. Alors on soustrait la plus petite de la plus grande, et l'on met le signe — devant la différence, pour indiquer la soustraction qui reste encore à effectuer.

Si, par exemple, on a reçu pour un jour une somme représentée par a, et qu'on dépense une somme représentée par b; à la fin du jour, on n'aura plus qu'une somme représentée par $a-b$. Plus la dépense b sera près d'égaler la recette a, moins le reste sera considérable, et si $b=a$, il ne restera rien. Mais si la dépense b est plus forte que la recette a, le reste sera *négatif*, c'est-à-dire qu'on sera *en dette*. Pour fixer les idées, supposons $a=3^f$, et concevons que la dépense soit successivement 1^f, 2^f, 3^f; les restes successifs seront 2^f, 1^f, 0^f. Mais si $b=4^f$, le reste sera -1^f, c'est-à-dire qu'on aura une *dette* de 1^f; si $b=5^f$, on aura une *dette* de 2^f; et ainsi de suite.

Les quantités négatives étant ainsi considérées, sous ce point de vue, comme venant à la suite de quantités positives décroissantes, on est convenu de les regarder comme plus pe-

tites que zéro ; en outre, les quantités négatives, exprimées par un caractère de plus grande valeur *absolue* ou indépendante du signe, venant après celles qui sont exprimées par un caractère de valeur absolue moins considérable, on est aussi convenu de regarder les premières comme plus petites que les dernières.

C'est par suite de ces conventions qu'on peut écrire algébriquement

$$-1 < 0, \quad -2 < -1, \quad -3 < -2, \text{ etc.}$$

18. Dans les calculs, on applique aux quantités négatives les mêmes règles que si elles étaient mises à la suite de quantités positives tellement choisies, que la soustraction pût s'effectuer complétement. C'est ce que nous allons développer en cherchant quelles modifications l'emploi des quantités négatives doit introduire dans les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, ce qui nous permettra d'établir ce qu'on appelle les *règles des signes.*

19. ADDITION. — 1° *Ajouter deux quantités de même signe.*

Si elles ont le signe +, il faut faire leur somme, à laquelle on donne le signe +. Si elles ont le signe —, comme ce signe indique séparément pour chacune d'elles une soustraction qui reste à effectuer, il faut l'indiquer aussi, pour leur ensemble, dans le résultat, c'est-à-dire faire leur somme indépendamment des signes et lui donner le signe —.

2° *Ajouter deux quantités de signes contraires.*

Si la plus grande a le signe +, comme le signe — de la plus petite indique une soustraction à effectuer, il faudra retrancher la plus petite de la plus grande et donner le signe + à la différence. Si c'est la plus grande, en valeur absolue, qui a le signe —, on en retranchera toujours l'autre quantité, mais on donnera le signe — à la différence, pour indiquer la soustraction qui reste encore à effectuer.

Pour résumer, si l'on représente par a et b deux nombres ou deux quantités absolues dont la plus grande est a, et qu'on emploie les parenthèses pour mieux mettre les signes en évidence, on aura

$$(+a)+(+b)=+(a+b),\ (-a)+(-b)=-(a+b),$$
$$(+a)+(-b)=+(a-b),\ (-a)+(+b)=-(a-b).$$

Ces résultats montrent que

1° *Pour ajouter deux quantités de même signe, il faut faire la somme des valeurs absolues de ces quantités, sans avoir égard au signe qu'on place ensuite devant la somme.*

2° *Pour ajouter deux quantités de signes contraires, il faut retrancher la plus petite de la plus grande, en valeur absolue, et donner à la différence le signe de la plus grande.*

De là on conclut évidemment la règle suivante :

Règle générale. *Pour ajouter deux quantités, il faut les écrire à la suite l'une de l'autre, chacune avec son signe.*

Ce qui précède montre en même temps qu'on peut, sans altérer le résultat, changer l'ordre des quantités qu'on doit ajouter.

20. Soustraction. — Cette opération, comme on l'a vu dans notre Arithmétique, n° 12, a pour but de trouver une quantité telle qu'en lui ajoutant une quantité donnée, on reproduise une autre quantité donnée. La même définition s'applique à tous les cas qui peuvent ici se présenter, et qui sont au nombre de quatre.

1° *Les deux quantités données positives.*

Si la quantité dont on soustrait est la plus grande, il faut en retrancher la plus petite et donner le signe + à la différence, ce qui est le cas ordinaire de l'Arithmétique. Si la quantité dont on soustrait est la plus petite, il faut la retrancher de la plus grande, mais donner le signe — à la différence, pour indiquer que la soustraction n'a pu s'effectuer entièrement (17); la différence montrera en même temps de combien il s'en faut que l'opération soit possible.

2° *La quantité dont on soustrait positive, la quantité à soustraire négative.*

Soit -9 à retrancher de $+4$. La différence doit être telle, qu'en lui ajoutant -9, on trouve $+4$. Ainsi d'abord la différence cherchée sera positive ; car si elle était négative, en lui ajoutant -9, on aurait un résultat négatif. En outre, on vient

de voir (19) que pour ajouter deux quantités de signes contraires, il faut retrancher la plus petite de la plus grande, et donner au résultat le signe de la plus grande. Donc la différence cherchée doit être plus grande que 9, et précisément égale à la somme absolue des deux quantités données 4 et 9, c'est-à-dire 13, puisque, après en avoir retranché 9, le reste doit être 4. Ainsi $(+4)-(-9)=+13$.

3° *La quantité dont on soustrait négative, la quantité à soustraire positive.*

Soit $+9$ à soustraire de -4. La somme de la différence et du nombre à soustraire devant être négative, cette différence sera aussi négative; car si elle était positive, la somme indiquée le serait également. En outre, si de la même somme, prise indépendamment du signe, on retranche 9, le reste doit être 4. Ainsi la différence cherchée doit être $9+4$ ou 13, en grandeur absolue, et comme elle doit avoir le signe —, on aura donc $(-4)-(+9)=-13$.

4° *Les deux quantités données négatives.*

En raisonnant comme ci-dessus, on verra que la différence cherchée doit égaler la différence absolue des deux quantités données, et avoir le signe de la plus grande. Car autrement la différence cherchée, ajoutée avec la quantité à soustraire, ne reproduirait pas la quantité dont on soustrait.

Pour résumer, si l'on reprend la notation du n° 19, où a est $>b$, on aura

$$(+a)-(+b)=+(a-b),\ (+b)-(+a)=-(a-b)$$
$$(+a)-(-b)=+(a+b),$$
$$(-a)-(+b)=-(a+b),$$
$$(-a)-(-b)=-(a-b),\ (-b)-(-a)=+(a-b).$$

On obtient algébriquement les mêmes résultats par la considération suivante, qui pourra paraître plus simple.

Puisque $+b-b=0$, il est évident qu'on n'altère nullement une quantité $+a$, en lui ajoutant $+b-b$, et que, par conséquent, $+a=+a+b-b$. Or, si l'on veut retrancher $+b$ de $+a$, il suffit d'effacer $+b$ dans le second membre, de sorte qu'il vient $+a-b$ pour la différence cherchée; et si l'on veut

retrancher $-b$ de $+a$, on efface $-b$ dans le second membre, ce qui donne $a+b$ pour la différence. On a de même $-a = -a+b-b$; si l'on retranche $+b$, il reste $-a-b$ ou $-(a+b)$, et si l'on retranche $-b$, il reste $-a+b$ ou $-(a-b)$.

On peut conclure, de ce qui précède, la règle suivante :

Règle générale. *Pour soustraire une quantité d'une autre, il faut changer le signe de la quantité à soustraire et l'écrire avec ce nouveau signe à la suite de celle dont on veut la soustraire.*

21. *Remarque.* On voit qu'en définitive *la soustraction revient réellement à une addition dans laquelle la quantité à soustraire doit être prise avec un signe contraire au sien.*

C'est pourquoi nous exposons ci-après (27), dans un même article, l'addition et la soustraction des quantités algébriques.

On voit, en outre, d'après les deux numéros précédents, qu'on ne doit pas, en Algèbre, attacher aux mots *somme* et *différence* la même idée qu'en Arithmétique. Dans l'Arithmétique proprement dite, une somme est toujours plus grande que chacun des nombres ajoutés, et une différence est toujours plus petite que le nombre dont on soustrait, parce qu'on opère sur des nombres censés tous positifs et envisagés seulement sous le point de vue de leur valeur absolue. Il en serait de même en Algèbre si l'on ne combinait que des quantités positives. Mais l'on y considère les quantités sous un point de vue plus général, en les regardant comme pouvant être positives ou négatives; alors, en opérant sur des quantités négatives, si on les ajoute, la somme devient une différence, et si on les retranche, la différence devient une somme. Les mots *somme* et *différence* n'entraînent donc pas toujours, comme en Arithmétique, l'un l'idée d'augmentation, l'autre l'idée de diminution.

22. Multiplication. — Les mots *multiplicande, multiplicateur, produit, facteurs du produit,* ont ici la même signification qu'en Arithmétique. Voyez les signes de la multiplication dans le tableau n° 5.

Pour envisager à la fois tous les cas, supposons qu'on ait à multiplier la quantité $(+a-b)$ par la quantité $(+c-d)$, où

les lettres a, b, c, d, représentent des quantités absolues positives, et où chaque facteur est ainsi formé d'une quantité absolue positive diminuée d'une autre quantité absolue positive. Il résulte de la définition de la multiplication, que si l'un des facteurs du produit augmente ou diminue d'un certain nombre d'unités ou de parties quelconques de l'unité, le produit doit augmenter ou diminuer du même nombre de fois ou de parties de fois l'autre facteur. D'après cela, si nous supposons qu'on ait effectué le produit du facteur $(a-b)$ par la quantité c, il est clair que ce produit sera trop fort, et devra être diminué du produit du même facteur par la quantité d, puisqu'on ne devait pas multiplier ce facteur $(a-b)$ par la quantité c, mais seulement par la quantité c diminuée de la quantité d. Pour obtenir le produit du facteur $(a-b)$ par $+c$, si nous faisons d'abord celui de $+a$ par $+c$, ou, ce qui est la même chose, de a par c, nous indiquerons ce produit par $(+a).(+c)$ ou par $a.c$, ou enfin par ac ou $+ac$. Comme on ne doit pas multiplier par c la quantité a, mais seulement la quantité a diminuée de la quantité b, il suit de ce qui précède que le produit indiqué par $+ac$ est trop fort, et doit être diminué du produit de la quantité b par c, lequel s'indique par $+bc$; on indiquera donc cette soustraction à effectuer en écrivant $+bc$ avec un signe contraire à la suite de $+ac$, ce qui donnera $+ac-bc$.

Il reste maintenant à trouver le produit du même facteur $(a-b)$ par la quantité d, lequel s'indique, d'après ce qu'on vient de voir, par $+ad-bd$, et à le retrancher de $+ac-bc$ (*). Effectuant la soustraction d'après les règles données plus haut (20), on trouve que

$$(+a-b).(+c-d)=+ac-bc-ad+bd.$$

(*) Cette démonstration de la règle des signes laisse à désirer, parce qu'elle ne concerne pas les quantités négatives prises isolément; mais aucun Traité d'Algèbre n'en renferme de plus complète, au moins à notre connaissance. La définition ordinaire de la multiplication, telle qu'on la donne en Arithmétique, peut bien s'appliquer au cas où le multiplicateur est positif, le multiplicande pouvant d'ailleurs être

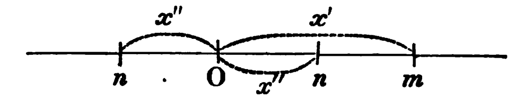
Comparant alors le produit aux deux facteurs, on voit que

$1^o\ (+a).(+c)=+ac;\quad 2^o\ (-b).(+c)=-bc;$
$3^o\ (+a).(-d)=-ad;\quad 4^o\ (-b).(-d)=+bd.$

positif ou négatif. Mais dans le cas où le multiplicateur est négatif, la définition ordinaire devient absolument inapplicable, et on ne peut déterminer le sens de l'opération, ni reconnaître comment on doit former le produit, autrement que par les considérations ci-dessus, au moins dans l'état actuel de la science.

Au reste, il ne faut pas perdre de vue que, d'après la nature des quantités indéterminées dont on se sert en Algèbre, on ne peut arriver à un résultat individuel, qu'après avoir donné à ces caractères une détermination. Or, il pourra se faire que les conditions, d'après lesquelles on devra les déterminer, renferment quelque incompatibilité. Dans ce cas, les résultats seront de purs symboles, non susceptibles d'être traduits en nombres. Mais comme, en opérant sur ces résultats, sous quelque forme qu'ils se présentent, on doit nécessairement satisfaire aux conditions d'où on les a déduits, on verra donc à quoi se réduisent, en définitive, les opérations qu'on avait indiquées sur ces symboles, et quel sens on doit leur attribuer. Ainsi, en traitant sous ce point de vue général chacun des cas particuliers qui peuvent se présenter, on obtiendra les règles relatives au calcul des résultats trouvés dans le cas dont il s'agit; et de la réunion de toutes ces règles on déduira les règles générales du calcul de tous les symboles qui peuvent se présenter en Algèbre, tels que les expressions *négatives*, *imaginaires*, etc.

Pour éclaircir ces considérations par un exemple fort simple, supposons qu'on ait à déterminer la distance de deux points m et n, que l'on sait être situés sur une droite donnée de position.



Si l'on appelle x' et x'' les distances respectives des deux points m et n, à un point O de la même droite, pris pour origine, il peut arriver que la distance mn de ces points soit représentée par la formule $x'+x''$, ou par la formule $x'-x''$. Dans la première hypothèse, l'origine est située entre les deux points; dans la seconde, l'origine les laisse d'un même côté. Si donc on exprime la distance mn, dans un des cas, par la

De là on peut conclure la règle suivante :

Règle générale. *Pour multiplier deux quantités l'une par l'autre, il faut faire le produit de ces quantités prises absolument, sans avoir égard aux signes, et donner au produit le signe + ou le signe —, selon que les deux facteurs sont de même signe ou de signes contraires.*

Cette règle s'énonce ordinairement d'une manière abrégée en disant :

+ par + donne +, — par + donne —,
+ par — donne —, — par — donne +.

23. Laplace démontrait la règle des signes de la manière suivante :

Lorsqu'un des facteurs du produit est zéro, le produit doit être nul. Donc si l'on doit multiplier $(+b)$ par $(+a-a)$, comme $(+b).(+a)=+ab$, il faut nécessairement, pour que le produit total soit zéro, que $(+b).(-a)=-ab$. De même si l'on doit multiplier $(-b)$ par $(a-a)$, comme $(-b).(+a)$ $=-ab$, d'après le 1[er] cas, il faut aussi que $(-b).(-a)$ $=+ab$.

24. Il suit de ce qui précède :

1° *Qu'un produit change de signe, lorsqu'on change le signe de l'un des facteurs ;*

2° *Qu'un produit ne change pas de signe, lorsqu'on change le signe de deux facteurs ;*

3° *Qu'un produit de deux facteurs n'est pas altéré, lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs.*

On voit, en outre, que la dernière proposition étant vraie

formule qui convient à l'autre cas, on devra trouver au moins pour l'une des distances x', x'', une valeur précédée du signe —; ce sera, par exemple, pour x''. Alors, si au lieu de prendre la formule qui a donné cette valeur de x'', précédée du signe —, on emploie l'autre formule, on obtiendra une valeur de x'' qui sera numériquement la même, au signe près. On voit donc que si l'on avait primitivement introduit dans le calcul la quantité x'' en changeant son signe, la première formule aurait donné, pour x'', la même valeur numérique que dans le premier cas, mais précédée du signe +.

pour deux facteurs, le sera encore pour trois facteurs, en considérant comme un seul facteur le produit des deux premiers facteurs, et ainsi de suite; de sorte qu'elle est applicable à un nombre quelconque de facteurs (voyez notre Arith., n° 18).

25. Division. — Les mots *dividende*, *diviseur* et *quotient* ont ici la même signification qu'en Arithmétique, et de même, étant donnés un produit et l'un des facteurs, on cherche à déterminer l'autre facteur nommé quotient, qui, multiplié par le diviseur ou le facteur connu, doit reproduire le dividende ou le produit donné. On fera donc d'abord la division sans avoir égard aux signes, ce qui donnera la valeur absolue du quotient : or, il est clair que le quotient doit avoir le signe $+$, si le dividende et le diviseur sont de même signe, et avoir le signe $-$, s'ils sont de signes contraires; car, autrement, le produit du quotient par le diviseur aurait un signe contraire à celui du dividende. Si donc on représente par q la valeur absolue du quotient de deux quantités quelconques a et b, on aura

$$\frac{+a}{+b}=+q,\quad \frac{+a}{-b}=-q,\quad \frac{-a}{+b}=-q,\quad \frac{-a}{-b}=-q.$$

De là on peut conclure la règle suivante :

Règle générale. *Pour diviser deux quantités quelconques l'une par l'autre, il faut effectuer la division sans avoir égard aux signes, et donner au quotient le signe* $+$ *ou le signe* $-$, *selon que le dividende et le diviseur ont le même signe ou des signes contraires.*

Cette règle s'énonce ordinairement d'une manière abrégée en disant :

$+$ *divisé par* $+$ *donne* $+$, $+$ *divisé par* $-$ *donne* $-$,
$-$ *divisé par* $+$ *donne* $-$, $-$ *divisé par* $-$ *donne* $+$.

26. Il faut prendre cette règle des signes comme un fait de calcul, sans chercher ce que peut signifier la division de deux quantités qui ne sont pas toutes deux positives. Il s'agit, en effet, dans cette division, de trouver un quotient, qui, multiplié par le diviseur, d'après les règles connues, reproduise le dividende.

§ 2. *Addition et soustraction des monômes. Réduction.*

27. L'ADDITION *est une opération qui a pour but de réunir plusieurs expressions en une seule.* Les règles générales données (19 et 20) s'appliquent évidemment à l'addition et à la soustraction de tant de monômes qu'on voudra, quels que soient leurs signes. Donc

Pour ajouter plusieurs monômes, il faut les écrire à la suite les uns des autres, chacun avec le signe dont il est affecté.

Pour soustraire un ou plusieurs monômes d'un autre, il faut écrire celui-ci le premier avec son signe, et les autres à la suite en changeant leurs signes.

D'après cela, si l'on veut ajouter les monômes $4a^2$, $-2ab$, $6a^2$, on aura le polynôme $4a^2-2ab+6a^2$; et si l'on veut retrancher du monôme $-3a^2b$ les monômes $6a^3$, $-4ab^2$, on aura le polynôme $-3a^2b-6a^3+4ab^2$.

28. Comme l'ensemble des termes d'un polynôme indique une suite d'additions et de soustractions, il résulte des règles établies précédemment que l'ordre dans lequel on écrit ces termes est indifférent, et qu'ainsi l'on peut changer les termes de place dans un polynôme sans en altérer la valeur, qui est évidemment égale à la somme des termes positifs diminuée de la somme des termes négatifs, et reste la même dans quelque ordre qu'on effectue successivement ces additions et soustractions partielles. D'après cela, si le polynôme résultant de l'addition ou de la soustraction de plusieurs monômes, ou, en général, si un polynôme quelconque a des termes semblables (5), soit voisins, soit disséminés, on pourra les *réduire* en un seul pour simplifier le polynôme.

Nous recommandons ici, une fois pour toutes, de ne jamais négliger cette simplification, qui se nomme la *réduction,* et se déduit des considérations suivantes:

Quand deux ou plusieurs termes semblables ont le même signe, ils indiquent qu'une même quantité, positive s'ils ont le signe $+$, négative s'ils ont le signe $-$, doit être ajoutée dans le premier cas, et retranchée dans le second, autant de fois qu'il y a d'unités dans la somme de leurs coefficients.

De même quand deux termes semblables ont l'un le signe +, l'autre le signe —, l'ensemble de ces termes exprime une même quantité répétée un nombre de fois égal à la différence du plus petit au plus grand coefficient, et affectée du même signe que le plus grand.

De là on peut déduire la règle suivante :

RÈGLE GÉNÉRALE. *Pour réduire en un seul plusieurs termes semblables d'un polynôme, il faut faire la somme des coefficients précédés du signe +, celle des coefficients précédés du signe —, retrancher la plus petite somme de la plus grande, et prendre la différence pour coefficient du terme unique remplaçant les termes semblables, en lui donnant le signe de la plus grande somme.*

Soit, par exemple, le polynôme

$$-6a^2+6ab-3a^2+8a^2-2ab+5a^2-ab.$$

En rapprochant les termes semblables, on pourra l'écrire ainsi :

$$8a^2+5a^2-6a^2-3a^2+6ab-2ab-ab.$$

Or, d'après ce qu'on vient de voir, on peut remplacer les deux termes positifs $8a^2+5a^2$ par le seul terme $13a^2$ égal à leur somme, puis les deux termes $-6a^2-3a^2$ par le seul terme $-9a^2$. On aura donc au lieu des quatre premiers termes les deux suivants $13a^2-9a^2$, qui se réduisent à $+4a^2$. De même les trois autres termes $6ab-2ab-ab$ se réduisent à $6ab-3ab$, et enfin au seul terme $3ab$. Le polynôme proposé, ainsi réduit, deviendra donc $4a^2+3ab$.

29. Il est facile de calculer la valeur d'un polynôme où l'on remplace les lettres par des quantités numériques. Prenons pour exemple le polynôme $2a-4b+3c$; si l'on fait $a=-3$, $b=-2$, et $c=+5$, d'après les règles exposées ci-dessus, on aura

$$2a=+2.(-3)=-6,\ -4b=-4.(-2)=+8,$$
$$+3c=+3.(+5)=+15;$$

substituant ces valeurs dans le polynôme proposé, il devient $-6+8+15$, et se réduit à $+17$ en effectuant les opérations.

On voit que si dans un monôme, ou dans un terme d'un polynôme, on substitue une valeur numérique négative à une lettre qui s'y trouve, le signe du monôme ou du terme change ou se conserve, selon que la lettre est affectée d'un exposant impair ou pair.

Si dans un polynôme on change tous les signes + en —, et tous les signes — en +, toutes les additions se trouvent remplacées par des soustractions, et réciproquement ; alors on voit par ce qui précède, que le résultat de la substitution des valeurs numériques aux lettres, c'est-à-dire, la valeur absolue du polynôme restera la même, mais changera de signe.

30. *Remarque.* Comme la valeur d'un polynôme reste la même quel que soit l'ordre des termes (28), si plusieurs termes contiennent une même lettre avec des exposants différents, on pourra disposer les termes de manière que les exposants de cette lettre aillent en croissant ou en décroissant, ce qui s'appelle *ordonner* le polynôme. Ainsi le polynôme $5a^4 - 3ba^3 + 3a^2 - 6b^2a$ est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de a ; et le polynôme $4a^3b + 5a^2b^2 + 6ab^3$ est ordonné à la fois selon les puissances décroissantes de a et croissantes de b.

Cette disposition a de grands avantages pour la facilité du calcul, et ne doit jamais être négligée. La lettre, suivant laquelle un polynôme est ordonné, se nomme la lettre *principale.*

§ 3. *Addition et soustraction des polynômes.*

31. Supposons qu'on doive ajouter les deux polynômes $a-b+c$ et $d+e-f$. Concevons qu'on ait donné aux lettres des valeurs particulières dans le second polynôme, et qu'on ait trouvé pour résultat la valeur absolue A. Si l'on ajoute cette valeur au premier polynôme, on a la somme $a-b+c+A$, ou bien en changeant l'ordre des termes, $A+a-b+c$. Mais il est évident qu'on peut, sans altérer cette dernière expression, y remplacer la quantité A par le polynôme primitif $d+e-f$, ce qui donne le polynôme total $d+e-f+a-b+c$, formé de la réunion des deux proposés. On n'a pas indiqué si la quantité A était positive ou négative, le raisonnement étant

identiquement le même dans les deux cas. De là on tire la règle suivante :

Règle générale. *Pour ajouter plusieurs polynômes, il faut les écrire les uns à la suite des autres, en conservant les signes de tous leurs termes. On effectue ensuite la réduction des termes semblables, s'il s'en trouve dans le résultat.*

Si l'on veut isoler momentanément l'un des polynômes qu'on doit ajouter, on le renferme entre deux parenthèses et on le fait précéder du signe +.

Lorsque les polynômes sont de nature à être ordonnés par rapport à une même lettre, on les écrit les uns au-dessous des autres, de manière que les termes semblables se correspondent, ce qui facilite la réduction.

Voici plusieurs exemples :

1°
$$\begin{array}{l} 5a^2-3ba+2c \\ -3a^2-6ab+8 \\ 4a^3-a^2+2ba-3 \\ \hline \text{Somme } 4a^3+a^2-7ba+2c+5. \end{array}$$

2°
$$\begin{array}{l} -\frac{5}{6}a^2-a-\frac{3}{4}b \\ \frac{2}{3}a^2-\frac{3}{4}a \\ -3a+\frac{3}{5}b \\ \hline \text{Somme } -\frac{1}{6}a^2-\frac{19}{4}a-\frac{3}{20}b. \end{array}$$

32. La règle de la soustraction se conclut aisément de ce qui précède. Car supposons qu'ayant substitué des valeurs aux lettres dans le polynôme à soustraire, le résultat ait donné la quantité A, pour effectuer la soustraction il faudra l'écrire avec un signe contraire à la suite de la quantité dont on doit la soustraire (27). Or, nous avons vu (29) que la valeur absolue d'un polynôme change de signe, lorsqu'on change celui de tous les termes, et comme, d'après la règle de l'addition, tous les termes du polynôme qu'on ajoute conservent leur signe, il en résulte qu'on retranchera le polynôme à soustraire en l'écrivant, après avoir changé tous ses termes de signe, à la suite de la quantité dont il doit être soustrait.

D'ailleurs il est clair qu'on doit opérer ainsi ; car alors tous les termes du résultat (non réduit) se composant de ceux de

la quantité dont on soustrait et de ceux du polynôme à soustraire pris en signe contraire, en ajoutant le polynôme à soustraire au résultat, on reproduira la quantité dont on soustrait.

De là résulte la règle suivante :

Règle générale. *Pour soustraire un polynôme d'une quantité quelconque, il faut l'écrire, après avoir changé le signe de tous ses termes, à la suite de cette quantité.*

Il faut toujours ordonner les polynômes et réduire le résultat s'il y a lieu.

Voici plusieurs exemples :

1° De	$8a^2 - 5\,ab + 4c$	2° De	$6a - 3b + 8$
soustraire	$5a^2 - \frac{2}{3}\,ab + c$	soustraire	$-\frac{5}{6}\,a + \frac{1}{3}b - c$
Reste non réduit	$8a^2 - 5\,ab + 4c$ $-5a^2 + \frac{2}{3}\,ab - c$	Reste non réduit	$6a - 3b + 8$ $+\frac{5}{6}\,a - \frac{1}{3}b + c$
Reste réduit	$3a^2 - \frac{13}{3}ab + 3c$	Reste réduit	$\frac{41}{6}\,a - \frac{10}{3}b + c + 8.$

§ 4. *Multiplication des monômes.*

33. D'après les signes de la multiplication (5), le produit d'un nombre quelconque de facteurs a, b^2, c, d^3,..... s'indique par $a \times b^2 \times c \times d^3$..... ou par $a\,.\,b^2\,.\,c\,.\,d^3$..... ou enfin par ab^2cd^3.....

Si une quantité quelconque a doit être multipliée par un produit bcd de plusieurs facteurs, comme un produit ne change pas, quel que soit l'ordre des facteurs (24 et Arith. n° 18), il est clair qu'on aura le même résultat en multipliant a par bcd, ce qui s'indique par $a.bcd$ ou $abcd$, et en multipliant bcd par a, ce qui s'indique par $bcd.a$ ou $bcda$, de sorte que $abcd = bcda$. Donc pour multiplier une quantité par un produit de plusieurs facteurs, on peut multiplier successivement cette quantité par chacun des facteurs. D'après cela, si l'un des facteurs est numérique, on l'écrit en tête du produit dont

il devient le coefficient; et s'il y a plusieurs facteurs numériques, c'est leur produit qui devient leur coefficient. Faisant $d=3$ dans le produit ci-dessus, il devient $3abc$, et si en outre $c=4$, on a $12ab$.

Lorsque deux ou plusieurs facteurs sont diverses puissances d'une même quantité, leur produit égale la même quantité avec un exposant égal à la somme des exposants des facteurs; car soient les deux facteurs a^2, a^3, comme a^2 n'est que l'abréviation de aa, et a^3 celle de aaa, il est clair que le produit de a^2 par a^3 n'est autre chose que $aa.aaa$, ou $aaaaa$, ou a^5.

34. Soit maintenant à multiplier deux monômes quelconques, $4a^2b^3c$, $\frac{2}{3}a^3bd^4$, par exemple. D'après ce qu'on vient de voir, le produit deviendra successivement

$$4.a^2.b^3.c.\frac{2}{3}.a^3.b.d^4,\quad 4.\frac{2}{3}.a^2.a^3.b^3.b.c.d^4,\quad \frac{8}{3}.a^5.b^4.c.d^4,$$

ou enfin $\frac{8}{3}a^5b^4cd^4$. Donc $4a^2b^3c.\frac{2}{3}a^3bd^4 = \frac{8}{3}a^5b^4cd^4$.

Nous n'avons encore considéré que des facteurs positifs; mais d'après la règle des signes exposée plus haut (22), il est évident que le signe du produit sera $+$ ou $-$, selon que le nombre des facteurs négatifs sera pair ou impair.

On peut conclure de ce qui précède la règle suivante:

Règle générale. *Pour multiplier deux ou, en général, plusieurs monômes, il faut faire le produit des coefficients, écrire comme facteurs, à la suite de ce produit, toutes les lettres qui se trouvent dans les monômes proposés, en donnant à chaque lettre qui leur est commune un exposant égal à la somme de ceux dont elle y est affectée, et conservant aux autres lettres leur exposant; il faut enfin donner au produit le signe $+$ ou $-$, selon que le nombre des facteurs négatifs est pair ou impair.*

Remarque. On ne doit pas oublier que les lettres écrites sans exposant ont l'exposant 1.

Si l'un des facteurs se réduit à zéro, le produit total devient nul.

§ 5. *Multiplication des polynômes.*

35. I. Soit d'abord le polynôme $a+b-c$ à multiplier par une quantité m, ce qui s'indique par $(a+b-c)m$, les lettres a, b, c désignant des quantités quelconques positives ou négatives.

1° Si m est un nombre entier positif, le produit est évidemment $a+b-c$ ajouté m fois, c'est-à-dire la somme de tous les termes du polynôme pris chacun avec son signe et répété m fois, ce qui donnera, en réduisant, $ma+mb-mc$. Les raisonnements employés plus haut (22) conduiraient encore au même résultat ; et il en serait de même dans les cas suivants.

2° Si m est un nombre fractionnaire positif $\frac{u}{v}$, on devra diviser $a+b-c$ par v et le multiplier par u ; or,

$$\frac{a+b-c}{v}=\frac{a}{v}+\frac{b}{v}-\frac{c}{v},$$

puisque, d'après le premier cas,

$$\left(\frac{a}{v}+\frac{b}{v}-\frac{c}{v}\right)v=a+b-c.$$

Multipliant $\frac{a}{v}+\frac{b}{v}-\frac{c}{v}$ par u, il vient

$$\frac{ua}{v}+\frac{ub}{v}-\frac{uc}{v} \quad \text{ou} \quad ma+mb-mc.$$

3° Si m est une quantité négative $-n$, on fera le produit de $a+b-c$ par la valeur absolue n de cette quantité, et on changera le signe de tous les termes, ce qui donnera

$$-na-nb+nc \text{ ou } ma+mb-mc.$$

II. Prenons maintenant les deux polynômes $a+b-c$, $d+e-f$, et supposons qu'en effectuant les opérations indiquées dans le premier polynôme, le résultat soit exprimé par la quantité A; d'après ce qu'on vient de voir, le produit du second polynôme par A sera $A(d+e-f)=Ad+Ae-Af$.

Mettant à la place de A le polynôme que cette lettre représente, le polynôme $Ad + Ae - Af$ ne changera pas de valeur, et deviendra

$$(a+b-c)\,d + (a+b-c)\,e - (a+b-c)f.$$

Or, d'après l'article I, $(a+b-c)\,d = ad + bd - cd$, de même $(a+b-c)\,e = ae + be - ce$, et $(a+b-c)f = af + bf - cf$; ce dernier produit devant être retranché, on changera les signes de tous ses termes en les écrivant à la suite de ceux des deux premiers produits qui conservent leurs signes; d'après cela on aura

$$(a+b-c)\,(d+e-f) = ad + bd - cd + ae + bc - ce - af - bf + cf.$$

De là résulte la règle suivante :

Règle générale. *Pour effectuer la multiplication de deux polynômes, il faut multiplier successivement tous les termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, en conservant dans les produits les signes des termes du multiplicande, lorsque le terme du multiplicateur a le signe +, et mettant des signes contraires, lorsque le terme du multiplicateur a le signe —.*

Il est clair qu'en opérant ainsi, le produit de deux termes quelconques aura le même signe que si ces termes étaient regardés comme des monômes isolés pris avec leurs signes. La règle précédente revient donc à dire que pour multiplier deux polynômes, il faut multiplier tous les termes du multiplicande par tous les termes du multiplicateur, et faire la somme de tous les produits.

36. Pour appliquer la règle, on dispose l'opération comme on le voit dans l'exemple suivant, où les polynômes ne contiennent qu'une lettre :

Multiplicande	$4a^3 - 3 + 4a$
Multiplicateur	$2a - 5a^2 + 5$
Produits partiels	$8a^4 - 6a + 8a^2$
	$-20a^5 + 15a^2 - 20a^3$
	$+20a^3 - 15 + 20a$
Produit total réduit	$8a^4 + 14a + 23a^2 - 20a^5 - 15.$

La première ligne des produits partiels s'obtient en multipliant tous les termes du multiplicande par le premier terme $2a$ du multiplicateur, qui est censé avoir le signe $+$; c'est pourquoi l'on a conservé les signes des termes du multiplicande.

La deuxième ligne des produits partiels s'obtient en multipliant tous les termes du multiplicande par le second terme $-5a^2$ du multiplicateur. Ce terme ayant le signe $-$, on a changé les signes des termes du multiplicande.

La troisième ligne des produits partiels s'obtient en multipliant tous les termes du multiplicande par le troisième terme $+5$ du multiplicateur. Ce terme ayant le signe $+$, on a conservé les signes des termes du multiplicande.

Faisant la somme de ces trois produits partiels pour avoir le produit total, on remarque que les termes semblables $-6a$, $+20a$ se réduisent à $+14a$, les termes $+8a^2$, $+15a^2$, à $+23a^2$, et enfin que les termes $-20a^3$, $+20a^3$ se détruisent. De sorte que le produit total devient, après ces réductions, le polynôme écrit plus haut.

Prenons, pour second exemple, les polynômes suivants, dont les termes contiennent plusieurs lettres:

Multiplicande	$4a^3bc^2 + 3ab^2c^4 - 2a^2bc$
Multiplicateur	$6abc^2 - 8a^3 + 3bc$
Produits partiels	$24a^4b^2c^4 + 18a^2b^3c^6 - 12a^3b^2c^3$
	$-32a^6bc^2 - 24a^4b^2c^4 + 16a^5bc$
	$+12a^3b^2c^3 + 9ab^3c^5 - 6a^2b^2c^2$
Produit total réduit	$18a^2b^3c^6 - 32a^6bc^2 + 16a^5bc + 9ab^3c^5 - 6a^2b^2c^2$.

En faisant la somme des trois produits partiels pour avoir le produit total, on voit que les termes $24a^4b^2c^4$, $-24a^4b^2c^4$ se détruisent, ainsi que les termes $-12a^3b^2c^3$, $+12a^3b^2c^3$, de sorte que le produit total se réduit au polynôme ci-dessus.

On voit, par ces deux exemples, que si les polynômes proposés ont des lettres communes, le produit total peut offrir des réductions. On a pu les effectuer ici assez facilement, parce

que les polynômes pris pour exemple n'avaient pas un grand nombre de termes; mais on conçoit que s'ils étaient plus compliqués, il faudrait, après avoir effectué tous les produits partiels, comparer successivement les termes de chacun d'eux avec ceux des autres, ce qui exigerait beaucoup d'attention et pourrait amener des erreurs. Or, on évite toute recherche en ordonnant les deux polynômes par rapport à une des lettres communes (30), et disposant tous les termes de manière que les termes semblables soient les uns au-dessous des autres, comme on le voit dans l'exemple suivant:

Multiplicande $4a^3-2a^2b+5ab^2$

Multiplicateur $2a^2-\frac{1}{2}ab+2b^2$

Produits partiels $\left\{\begin{array}{l} 8a^5-4a^4b+10a^3b^2 \\ \quad -2a^4b+\quad a^3b^2-\frac{5}{2}a^2b^3 \\ \qquad\qquad 8a^3b^2-\quad 4a^2b^3+10ab^4 \end{array}\right.$

Produit total réduit $8a^5-6a^4b+19a^3b^2-\frac{13}{2}a^2b^3+10ab^4.$

37. On voit par l'exemple précédent qu'il est très-avantageux, pour la facilité des réductions, d'ordonner les polynômes. Dans ce cas, le produit se trouve lui-même ordonné par rapport à la même lettre. En outre, les termes du plus grand et du plus petit exposant de cette lettre dans le produit proviennent des termes du plus grand et plus petit exposant de la même lettre dans chaque facteur, et par conséquent ne peuvent se réduire avec aucun autre du produit total. Enfin, si l'on considère comme des produits partiels ceux du multiplicande par les différents termes du multiplicateur, il y aura autant de produits partiels qu'il y a de termes dans ce dernier facteur.

Remarquons encore que si les deux polynômes sont homogènes (5), le produit le sera également et d'un degré égal à la somme des degrés des facteurs. Lorsqu'il en arrive autrement, c'est une preuve qu'on a commis des erreurs dans les multiplications partielles.

38. Si plusieurs termes d'un polynôme contiennent la lettre par rapport à laquelle on ordonne avec le même exposant, on réunit ces termes en un seul produit dont la lettre affectée de l'exposant commun devient un facteur, et dont l'autre facteur, qu'on peut considérer comme son coefficient, devient un polynôme susceptible d'être également ordonné par rapport à une autre lettre; celle-ci peut encore se trouver avec le même exposant dans plusieurs termes de ce dernier polynôme, et alors on réunit de même ces termes en un seul produit dont la nouvelle lettre est un facteur, et dont l'autre facteur devient un autre polynôme qu'on peut encore ordonner par rapport à une autre lettre, et ainsi de suite.

Soient, par exemple, les polynômes

$$5a^2b - 3a^2 - 8ab^2 - 3ab,$$
$$3a^2 - 4a^2b + ab.$$

Pour effectuer le produit de ces polynômes, on les mettra sous la forme

$$(5b-3)a^2 - (8b^2+3b)a,$$
$$-(4b-3)a^2 + ba.$$

Le produit de ces deux polynômes devient, après la réduction,

$$-(20b^2-27b+9)a^4 + (32b^3-7b^2-12b)a^3 - (8b^3+3b^2)a^2.$$

39. Nous avons vu (Arith. n°s 99 et 117) comment on forme le carré et le cube d'un nombre composé de dizaines et d'unités, c'est-à-dire de deux parties. L'Algèbre donne le même résultat d'une manière générale, ainsi qu'il suit, *a* et *b* représentant deux quantités quelconques :

$$\begin{array}{l|l} a+b & a^2+2ab+b^2 \\ a+b & \qquad\quad a+b \\ \hline a^2+ab & a^3+3a^2b+ab^2 \\ \quad +ab+b^2 & \quad +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^2+2ab+b^2 & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{array}$$

Ainsi *le carré de la somme de deux quantités contient le carré de la première, plus deux fois le produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.*

De même *le cube de la somme de deux parties contient le cube de la première, plus trois fois le produit du carré de la première par la deuxième, plus trois fois le produit de la première par le carré de la deuxième, plus le cube de la deuxième.*

On formerait d'une manière analogue la quatrième puissance, et ainsi de suite.

D'après cela, il est facile de vérifier si un trinôme ou un quadrinôme est le carré ou le cube d'un binôme, ce qui permet alors de simplifier les expressions et de trouver plus aisément les résultats que l'on cherche.

Il en est de même des deux exemples suivants :

$$\begin{array}{l} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ \quad -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ \quad -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array}$$

D'après cela 1° *le carré de la différence de deux quantités égale le carré de la première, moins deux fois le produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.*

2° *Le produit de la somme de deux quantités par leur différence, égale la différence des carrés.*

Réciproquement, *la différence des carrés de deux quantités égale le produit de la somme par leur différence.*

Si donc on a, par exemple, à multiplier les deux polynômes $5a^2b+2ac$, $5a^2b-2ac$, on remarque que le premier facteur étant la somme des deux quantités $5a^2b$, $2ac$, dont le second facteur est la différence, le produit sera la différence des carrés. On aura donc

$$(5a^2b+2ac)(5a^2b-2ac)=25a^4b^2-4a^2c^2.$$

40. C'est ici le lieu de démontrer le théorème suivant, supposé tacitement par tous les auteurs, et qui est indispensable pour les théories de la division et du plus grand commun diviseur.

THÉORÈME. *Deux polynômes qui doivent avoir identiquement les mêmes valeurs sont identiques.*

Soient les polynômes Ax^3+Bx^2+Cx+D, ax^3+bx^2+cx+d, ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre commune x, et qui doivent être égaux, quel que soit x, les coefficients pouvant être d'ailleurs des monômes ou des polynômes. On doit avoir

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=ax^3+bx^2+cx+d$$

pour toute valeur de x. Remplaçant x par $2x$, il vient

$$8Ax^3+4Bx^2+2Cx+D=8ax^3+4bx^2+2cx+d;$$

retranchant ces égalités membre à membre, et supprimant le facteur commun x, on obtient

$$7Ax^2+3Bx+C=7ax^2+3bx+c.$$

Remplaçant encore x par $2x$, il vient

$$28Ax^2+6Bx+C=28ax^2+6bx+c.$$

Retranchant de même les deux dernières égalités membre à membre, et supprimant le facteur commun x, on trouve

$$21Ax+3B=21ax+3b.$$

Opérant encore de même, on obtient enfin

$$21A=21a, \text{ d'où } A=a.$$

Supprimant alors les quantités égales $21Ax$ et $21ax$ dans l'égalité ci-dessus, il vient $3B=3b$, d'où $B=b$; ainsi de suite, ce qui démontre le théorème énoncé.

§ 6. *Division des monômes. Exposant zéro, exposants négatifs.*

41. Nous avons dit (25) qu'en Algèbre la division est tout à fait analogue à la même opération en Arithmétique et qu'ainsi le quotient multiplié par le diviseur doit reproduire le dividende. En outre, nous avons déterminé le signe du quotient dans tous les cas.

Si donc on veut diviser le monôme $24a^5b^2c$ par le monôme $8a^3b^2$, la question se réduit à trouver une quantité qui, multipliée par $8a^3b^2$, donne le produit $24a^5b^2c$. Il est clair que cette quantité ne peut être un polynôme, puisqu'en le multipliant par un monôme on aurait un polynôme. Le quotient étant donc un monôme, si l'on se reporte à la règle donnée (34)

pour la multiplication de deux monômes, on verra d'abord que le coefficient 24 du dividende doit être le produit du coefficient 8 du diviseur par celui du quotient ; donc ce dernier égale $\frac{24}{8}$ ou 3. Ensuite le dividende doit contenir toutes les lettres qui entrent dans le diviseur et le quotient, chaque lettre commune, avec un exposant égal à la somme de ceux qu'elle a dans le diviseur et dans le quotient, et chaque lettre non commune, avec son exposant. D'après cela, l'exposant 5 de a, dans le dividende, égale l'exposant 3 de a dans le diviseur, plus l'exposant inconnu de a dans le quotient, et par conséquent celui-ci égale 5—3 ou 2. La lettre suivante b, ayant le même exposant dans le dividende et dans le diviseur, n'entre pas dans le quotient. Enfin la lettre c n'étant pas dans le diviseur, doit se trouver dans le quotient avec le même exposant qu'elle a dans le dividende. On a donc

$$\frac{24a^5b^2c}{8a^3b^2}=3a^2c.$$

De là on peut conclure la règle suivante, qu'on rend générale au moyen de celle des signes donnée plus haut (25) :

Règle générale. *Pour effectuer la division d'un monôme par un monôme, il faut diviser le coefficient du dividende par celui du diviseur, ce qui donne le coefficient du quotient ; écrire au quotient les lettres communes aux deux monômes, en donnant à chacune pour exposant la différence entre les exposants de la même lettre dans le dividende et le diviseur, et omettant les lettres qui sont affectées du même exposant dans les deux monômes ; écrire au quotient, avec leurs exposants, les lettres du dividende qui n'entrent pas dans le diviseur ; donner enfin au quotient le signe + ou le signe —, selon que le dividende et le diviseur ont le même signe ou des signes contraires.*

D'après cette règle on trouve

$$\frac{16a^3b^2c}{4ab}=4a^2bc,\qquad \frac{-15a^5bc^2}{+5a^3}=-3a^2bc^2,$$

$$\frac{+9a^4bcd^2}{-3ad^2}=-3a^3bc,\qquad \frac{-3a^3b^2c}{-a^3bc}=+3b.$$

42. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le dividende et le diviseur par une même quantité, le quotient ne change pas de valeur. Car en nommant q le quotient de deux quantités quelconques a et b, on aura $\frac{a}{b}=q$, d'où $a=bq$; or, si l'on multiplie a et bq par une quantité quelconque m, on trouve

$$am=bqm=q.bm, \text{ d'où } \frac{am}{bm}=q, \text{ ou le quotient de } \frac{a}{b}.$$

Ainsi en divisant am par bm ou bien a par b, on a le même quotient q.

43. La division des monômes n'est pas toujours possible, et l'application de la règle ci-dessus peut faire constater les trois cas exceptionnels suivants :

1° Si le coefficient du dividende n'est pas exactement divisible par le coefficient du diviseur, on ne peut effectuer la division sans donner au quotient un coefficient fractionnaire; avec cette modification, le présent cas d'exception disparaît.

2° Si le diviseur contient des lettres qui ne soient pas dans le dividende, on ne peut trouver un monôme, qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende.

3° Si une lettre a se trouve dans le diviseur avec un exposant plus fort que dans le dividende, la division ne peut s'effectuer; car quelque monôme que l'on prenne pour quotient, l'exposant de a, dans le dividende, ne sera jamais égal à la somme des exposants de a dans le diviseur et dans le quotient.

44. Si l'on applique à la division des deux monômes a^3 et a^3, formés de la même lettre avec des exposants égaux, la partie de la règle relative au cas où ils sont inégaux, on trouve le quotient a^0, qu'on n'a pas encore eu l'occasion de considérer. Or, le véritable quotient doit être égal à l'unité, puisque toute quantité divisée par elle-même donne pour quotient 1. Si donc on veut que la règle ci-dessus, qui suppose tacitement l'exposant de chaque lettre commune plus grand dans le dividende que dans le diviseur, s'applique encore au cas où ces exposants sont égaux, on se trouve naturellement conduit à convenir que l'expression a^0 représentera l'unité, quel que soit a.

Cette valeur peut en quelque sorte se déduire de la notation des exposants; en effet, on peut considérer a^2 comme l'équivalent de $1.a.a$, de même a^1 ou a comme l'équivalent de $1.a$, et par suite a^0 comme l'équivalent de 1.

Ainsi, en général, $\frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1$.

45. Lorsqu'on veut diviser a^3 par a^4, dont l'exposant 4 est plus fort que l'exposant 3 du dividende, on tombe dans le troisième cas d'impossibilité signalé plus haut (43); et si l'on applique la règle donnée (41), on trouve le quotient a^{-1}, expression qu'on n'a pas encore eu l'occasion de considérer. Or, le véritable quotient doit être $\frac{1}{a}$, puisqu'on peut (42), sans altérer le quotient, diviser le dividende et le diviseur par une même quantité, a^3, par exemple, ce qui donne $\frac{a^3}{a^4} = \frac{a^3}{a^3.a} = \frac{1}{a}$. Si donc on veut que la règle ordinaire, qui suppose tacitement l'exposant de chaque lettre commune plus grand dans le dividende que dans le diviseur, s'applique aussi bien au cas où le second exposant est plus grand que le premier, on se trouve naturellement conduit à convenir que les expressions $\frac{1}{a}$ et a^{-1} doivent être regardées comme équivalentes.

De même, si l'on divise a^m par a^{m+n}, on trouve

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = a^{m-(m+n)} = a^{-n};$$

or, $\frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{a^m}{a^m.a^n}$ ou bien $\frac{1}{a^n}$, en divisant le dividende et le diviseur par a^m.

Donc, en général, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. D'où il résulte que

Toute quantité affectée d'un exposant négatif égale l'unité divisée par cette même quantité affectée du même exposant, mais positif.

46. *Remarque.* En admettant les exposants négatifs, on fait disparaître le dernier cas d'impossibilité de la division des monômes.

Ainsi $$\frac{4a^3b^2c^2}{7a^5b^2c^3d} = \frac{4}{7}a^{-2}c^{-1}d^{-1},$$

car $$\frac{4}{7}a^{-2}c^{-1}d^{-1}.7a^5b^2c^3d = 4a^3b^2c^2.$$

§ 7. *Division des polynômes.*

47. Supposons d'abord qu'on ait à diviser un polynôme par un monôme, il est clair que le quotient sera un polynôme, et qu'en multipliant tous ses termes (36) par le monôme diviseur, on devra reproduire identiquement le polynôme dividende (40); par conséquent, en divisant tous les termes de celui-ci par le diviseur, on obtiendra le quotient.

Exemple : $$\frac{6a^4b^2c^2 + 18a^3b^2c^3 - 30a^2b^3d}{-6a^2b^2} = -a^2c^2 - 3ac^3 + 5bd.$$

48. Soit maintenant un polynôme à diviser par un polynôme. Il résulte de la nature de la division et de la multiplication des polynômes, que le dividende supposé P est identiquement (40) le produit du diviseur D par le quotient cherché Q, et que ce produit P est composé d'autant de produits partiels qu'il y a de termes au quotient. Ayant en outre ordonné le diviseur D et le quotient Q par rapport à une même lettre, le produit P s'est trouvé ordonné par rapport à la même lettre, et son premier terme, la contenant avec le plus haut exposant qui égale la somme de ceux qu'elle a dans le premier terme de D et dans le premier terme de Q, n'a pu éprouver de réduction (37). Si donc, après avoir ordonné le dividende P et le diviseur D par rapport à une même lettre, on divise le premier terme de P par le premier terme de D, on aura nécessairement le premier terme du quotient; et en retranchant du dividende le produit de ce premier terme par tous les termes du diviseur, le reste ne contiendra plus que les termes résultant du produit du diviseur par les autres termes encore inconnus du quotient. Considérant ce reste, réduit et ordonné, comme un nouveau dividende, on raisonnera comme tout à l'heure, et en divisant son premier terme, qui contient la lettre *principale* avec le plus haut exposant, par le premier terme du diviseur, on aura le

second terme du quotient; si donc on retranche du nouveau dividende le produit du diviseur par ce second terme du quotient, on aura un second reste qui ne contiendra plus que le produit du diviseur par les autres termes encore inconnus du quotient : ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on trouve zéro pour reste; alors le quotient n'a plus de terme à déterminer.

Lorsqu'on n'ordonne pas les polynômes, le même raisonnement sert encore à trouver le quotient; on divise alors le terme du dividende où une lettre a le plus haut exposant par le terme du diviseur où la même lettre a aussi le plus haut exposant, ce qui donne le terme du quotient où elle a de même le plus haut exposant. Mais pour la facilité des calculs, on ordonne toujours les polynômes proposés par rapport à une même lettre, parce qu'alors le terme du plus haut exposant de cette lettre se trouve toujours le premier, non-seulement dans chaque polynôme, mais encore dans chacun des restes successifs, quand on fait les calculs en ordre.

On trouverait également le quotient en considérant dans chaque polynôme les termes de plus petit exposant d'une même lettre, c'est-à-dire, le terme qui est le dernier dans chaque polynôme ordonné par rapport à elle, car on a vu que ce terme ne subit pas non plus de réduction (37).

De là résulte la règle suivante :

Règle générale. *Pour effectuer la division de deux polynômes, il faut, après les avoir ordonnés par rapport à une même lettre, diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, ce qui donne le premier terme du quotient; retrancher du dividende le produit du diviseur par ce premier terme, et diviser le premier terme du reste ordonné de même, par le premier terme du diviseur, ce qui donne le deuxième terme du quotient, ainsi de suite; l'ensemble des termes ainsi obtenus sera le quotient.*

49. Soit, par exemple, le polynôme

$$7a^2b^3-25a^4b+12a^5-10ab^4-2a^3b^2$$

à diviser par $$2b^2+4a^2-3ab.$$

On ordonne ces polynômes par rapport aux exposants dé-

1re division partielle

$$\left\{\begin{array}{l|l} 3a^4-2a^3+3a^2b-2ab & 3a^2-2a \\ -3a^4+2a^3 & \overline{a^2+b} \\ \hline \quad\quad +3a^2b-2ab & \\ \quad\quad -3a^2b+2ab & \\ \hline \quad\quad\quad 0 \quad\quad 0 & \end{array}\right.$$

2e division partielle

$$\left\{\begin{array}{l|l} -9a^2b+6ab & 3a^2-2a \\ +9a^2b-6ab & \overline{\quad -3b} \\ \hline \quad 0 \quad\quad 0 & \end{array}\right.$$

Si le dividende avait 2, 3,... termes de plus que le diviseur, on abaisserait à la droite de chaque reste, comme en Arithmétique, seulement les termes du dividende nécessaires pour former chaque dividende partiel.

51. Dans le cas où le diviseur ne contiendrait pas la lettre a, qu'il convient de choisir pour ordonner le dividende, on obtiendra le quotient en divisant séparément chaque polynôme coefficient de a dans le dividende par le polynôme diviseur, multipliant les quotients partiels par les puissances respectives de a, et faisant la somme des produits; ce cas est tout à fait analogue à celui de la division d'un polynôme par un monôme.

52. La division des polynômes n'est pas toujours possible. On reconnaît qu'elle ne peut s'effectuer entièrement, lorsque dans le cours de l'opération, on parvient à un reste dont le premier terme contient la lettre par rapport à laquelle on a ordonné, avec un exposant moindre que celui de la même lettre dans le premier terme du diviseur. Car alors, quel que soit le terme qu'on mette au quotient, son produit par le premier terme du diviseur ne pourra jamais reproduire le premier terme du reste. On peut alors, comme en Arithmétique, compléter le quotient en ajoutant à la partie trouvée une expression que l'on forme en indiquant la division du dernier reste par le diviseur.

Soit, par exemple, $a^3-3a^2b+6ab^2-2b^3$, à diviser par $a^2-3ab+b^2$, on opérera comme il suit :

$$\begin{array}{l|l} \quad a^3-3a^2b+6ab^2-2b^3 & a^2-3ab+b^2 \\ & \overline{a} \\ -a^3+3a^2b-\ ab^2 & \\ \hline \quad\quad\quad +5ab^2-2b^3 & \end{array}$$

L'exposant de a étant 1 dans le premier terme du reste, tandis qu'il est 2 dans le premier terme du diviseur, l'opération ne peut être poussée plus loin; alors on a

$$a^3-3a^2b+6ab^2-2b^3=(a^2-3ab+b^2)a+5ab^2-2b^3,$$

et le quotient total est $a+\dfrac{5ab^2-2b^3}{a^2-3ab+b^2}$.

53. Quand on admet les exposants négatifs, la division peut souvent s'effectuer entièrement, quoique le premier terme d'un reste contienne la lettre principale avec un exposant plus petit que dans le premier terme du diviseur, et alors il faut une autre considération pour reconnaître quand elle est impossible. Dans ce cas, on est certain que la division ne peut s'effectuer, si, après avoir ordonné les deux polynômes par rapport à une même lettre, et commencé l'opération comme à l'ordinaire, on arrive à mettre au quotient un terme contenant la lettre principale avec un exposant moindre que la différence des exposants de cette lettre dans le dernier terme du dividende et du diviseur. En effet, nous avons vu (37 et 48) que le dernier terme du dividende provient, sans réduction, de la multiplication du dernier terme du diviseur par le dernier terme du quotient, et que, par conséquent, en divisant le dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur, on doit obtenir le dernier terme du quotient, c'est-à-dire, le terme où la lettre principale a le plus faible exposant.

Le même raisonnement s'applique exactement au cas où l'on n'admet que les exposants positifs, et suffit pour faire reconnaître immédiatement l'impossibilité d'une division.

En général, si l'on a le polynôme

$$\mathrm{A}a^m+\mathrm{B}a^{m-1}+\mathrm{C}a^{m-2}+\ldots+\mathrm{S}a^p,$$

à diviser par $\mathrm{A}'a^n+\mathrm{B}'a^{n-1}+\mathrm{C}'a^{n-2}+\ldots+\mathrm{S}'a^q$,

où les lettres A, A',.... représentent des coefficients quelconques de la lettre principale, et où les lettres S et S' représentent ceux des derniers termes, on reconnaîtra que la division ne peut se terminer si les opérations successives conduisent à mettre au quotient un terme de la forme $\mathrm{R}a^{p-q-1}$; car le produit de ce terme $\mathrm{R}a^{p-q-1}$ par le dernier terme $\mathrm{S}'a^q$ du diviseur,

étant $RS'a^{p-1}$, ne peut se trouver dans le dividende où le plus petit exposant de a est p.

Les points intermédiaires, écrits dans un polynôme, indiquent des termes sous-entendus et soumis à la même loi que les précédents.

La considération des exposants négatifs ne change absolument rien aux raisonnements, d'où l'on a déduit la règle générale de la division des polynômes. Le quotient doit toujours être tel que, multiplié par le diviseur, il reproduise le dividende.

54. Avant de commencer la division de deux polynômes, il faut examiner attentivement chacune des lettres communes aux deux polynômes proposés, et si, seulement pour l'une d'elles, les termes du dividende et du diviseur qui la contiennent avec le plus haut exposant (ou aussi avec le plus bas), ne sont pas divisibles l'un par l'autre par suite de la présence de plusieurs lettres dans le terme du diviseur, il est certain que la division des deux polynômes ne pourra s'effectuer. La même considération s'applique aussi à la division des dividendes partiels successifs par le diviseur.

55. Si l'on avait ordonné les deux polynômes proposés pa rapport aux puissances ascendantes d'une lettre, les division successives pourraient toujours s'effectuer exactement, san cependant faire parvenir à un reste nul. Dans ce cas, le rai sonnement employé ci-dessus (53) montre que la division es impossible, lorsqu'on est amené dans le cours de l'opération mettre au quotient un terme où la lettre principale a un expo sant plus fort que la différence des exposants de la même lettr dans le dernier terme du dividende et du diviseur; car l quotient de ces deux derniers termes doit donner le dernie terme du quotient.

En voici un exemple :

$$\begin{array}{r|l}
1 - 3x + x^2 & 1 - 2x \\ \cline{2-2}
-1 + 2x \quad & 1 + x + 3x^2 + \text{ etc.} \\ \cline{1-1}
x + x^2 & \\
-x + 2x^2 & \\ \cline{1-1}
+3x^2 \quad & \\
-3x^2 + 6x^3 & \\ \cline{1-1}
+6x^3 & \\
\text{etc.} &
\end{array}$$

Le quotient peut se représenter par

$$1 + x + \frac{3x^2}{1 - 2x}, \quad \text{ou par} \quad 1 + x + 3x^2 + \frac{6x^3}{1 - 2x}, \text{ etc.}$$

56. Proposons-nous de déterminer les relations qui doivent exister entre les coefficients des polynômes $x^3 - px^2 + qx - r$ et $x - m$, pour que la division du premier par le second puisse s'effectuer exactement. L'opération se dispose à l'ordinaire comme il suit :

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - px^2 + qx - r & x - m \\ \hline
\begin{array}{r|l} +m & x^2 \\ -p & \end{array} & \begin{array}{r|l} x^2 + m & x + m^2 \\ -p & -pm \\ & +q \end{array} \\
\quad \begin{array}{r|l} +m^2 & x \\ -pm & \\ +q & \end{array} & \\
\qquad \begin{array}{r} +m^3 \\ -pm^2 \\ +qm \\ -r \end{array} &
\end{array}$$

On ne peut pas pousser plus loin la division, puisque le reste ne contient plus x ; et si l'on veut qu'elle s'effectue exactement, il faut nécessairement que le reste soit nul, c'est-à-dire qu'on ait $m^3 - pm^2 + qm - r = 0$. Or, si l'on examine le premier terme de chacun des restes successifs, on trouve que ces premiers termes sont soumis à la loi suivante :

Le premier terme $(m - p)\, x^2$ du premier reste se forme du

premier terme x^3 du dividende en le multipliant par m, ajoutant au produit le terme $-px^2$ du dividende où x a le même exposant 2, et divisant ensuite par x.

De même le premier terme $(m^2-pm+q)\,x$ du second reste se forme du terme $(m-p)\,x^2$ en le multipliant par m, ajoutant au produit le terme $+qx$ de même exposant dans le dividende, et divisant par x, ainsi de suite.

Il est facile de voir que cette loi est générale, et que si l'on divise par $x-m$ un polynôme quelconque

$$x^n-px^{n-1}+qx^{n-2}-\ldots-ux+v,$$

le premier terme de chaque reste se formera toujours du premier terme du reste précédent, en le multipliant par m, ajoutant le terme du dividende où x a le même exposant, et divisant par x. D'où il résulte qu'au moment où la division s'arrêtera, parce que le reste ne contiendra plus x, ce reste, qui alors sera comme réduit à son premier terme par rapport à x, sera

$$m^n-pm^{n-1}+qm^{n-2}-\ldots-um+v,$$

lequel devra être réduit à zéro pour que la division puisse s'effectuer exactement, c'est-à-dire qu'on devra avoir

$$m^n-pm^{n-1}+qm^{n-2}-\ldots-um+v=0.$$

Or ce polynôme est précisément le dividende où l'on a remplacé x par m.

De là résulte ce principe remarquable, et dont nous ferons un grand usage dans la suite :

Toute quantité m, *qui, mise à la place de* x *dans un polynôme* $x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+$ *etc., le rend égal à zéro, est telle que le polynôme peut se diviser exactement par* $x-m$.

Il est à remarquer que les quotients partiels successifs, c'est-à-dire, les termes successifs du quotient total, suivent entre eux la même loi que les premiers termes des restes successifs, et se déduiraient chacun du terme précédent de la même manière. Il ne peut d'ailleurs en être autrement, puisque les termes successifs du quotient s'obtiennent en divisant le premier terme des restes successifs par x.

57. Terminons par un autre exemple également remarqua-

ble, que fournit la division du binôme $x^m - a^m$ par le binôme $x-a$, m étant un nombre entier positif quelconque.

On aura

$$\begin{array}{l|l} x^m - a^m & x-a \\ -x^m + ax^{m-1} & x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots + a^{m-1} \\ \hline +ax^{m-1} - a^m & \\ -ax^{m-1} + a^2x^{m-2} & \\ \hline +a^2x^{m-2} - a^m & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ +a^mx^0 - a^m. & \end{array}$$

On voit que chaque reste, ou plutôt chaque dividende successif, ne contient que deux termes dont le second est invariablement le second terme du dividende, et dont le premier se déduit du premier terme du reste précédent en le multipliant par a et le divisant par x; de sorte qu'à chaque nouveau reste, l'exposant de a croissant de 1, tandis que celui de x diminue de 1, leur somme est constante : or comme m est un nombre entier positif, il arrivera nécessairement un moment où, l'exposant de a devenant m, celui de x sera zéro, et par conséquent le premier terme de ce reste sera a^mx^0 ou a^m. Mais alors le reste total $a^m - a^m$ est nul : ainsi la division se terminera toujours.

On peut encore vérifier l'exactitude du quotient en le multipliant par $x-a$; car alors le produit donne

$$\begin{array}{l} a^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \ldots\ldots + a^{m-1}x \\ \quad - ax^{m-1} - a^2x^{m-2} - \ldots\ldots - a^{m-1}x - a^m, \end{array}$$

qui devient $x^m - a^m$ par la réduction.

Si $a=1$, on a $\dfrac{x^m-1}{x-1} = x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1$.

§ 8. *Fractions algébriques.*

58. Les mots *fraction*, *numérateur*, *dénominateur*, ont ici la même acception qu'en Arithmétique (Voy. notre Cours, n° 50). Lorsque la division de deux quantités quelconques ne s'effectue pas entièrement, on complète le quotient en lui ajoutant une

entiers et leur réduction en fraction d'un dénominateur donné.

4° Il en est encore de même pour la multiplication et la division. Car en représentant par p et q les valeurs de deux fractions quelconques $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, on a $p=\frac{a}{b}$, $q=\frac{c}{d}$, et, par conséquent, $pb=a$, $qd=c$. Multipliant ces deux équations, membre à membre, il vient $pb.qd=a.c$, ou bien $pq.bd=ac$, qui donne $pq=\frac{ca}{bd}$.

Donc *le produit de deux fractions s'obtient en divisant le produit des numérateurs par celui des dénominateurs* (Arith., n° 68).

Soit maintenant $\frac{a}{b}$ à diviser par $\frac{c}{d}$; réduisant au même dénominateur et multipliant ensuite les deux termes par le dénominateur commun, il vient

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{ad}{bd}}{\frac{bc}{bd}}=\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$$

Donc *le quotient de deux fractions s'obtient en multipliant la fraction dividende par la fraction diviseur renversée* (Voy. notre Arith., n° 72).

Les entiers, étant toujours censés avoir l'unité pour dénominateur, sont compris dans ces deux règles.

60. On fera bien de s'exercer sur les exemples suivants :

1° $$\frac{6ab}{3c-d}\cdot\left(\frac{c+d}{4}-\frac{d}{3}\right)=\frac{ab}{2}.$$

2° $$\frac{\frac{a^2-1}{4a^2}}{\frac{3a^2+3}{2a^2+2}}=\frac{a^2-1}{6a^2}.$$

3° $$\frac{\left(\frac{6a}{2b-c}\right)\left(\frac{b+c}{3}-\frac{c}{2}\right)}{\frac{a+\frac{b-a}{1+ba}}{1-\frac{ab-a^2}{1+ba}}}=\frac{a}{b}.$$

61. Les exposants négatifs (45) permettent souvent de mettre les fractions sous la forme de quantités entières, ce qui facilite les opérations. Ainsi

$$\frac{a^m b^n}{a^p b^q c^r} = a^{m-p} b^{n-q} c^{-r}.$$

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

SECTION PREMIÈRE.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE.

§ 1. *Principes généraux.*

62. Nous avons vu (6 — 11) que certaines questions peuvent être traitées d'une manière algébrique, et que leur solution se compose de deux parties bien distinctes : l'une *la mise en équation*, pour laquelle il ne peut y avoir de règle précise ; l'autre *la résolution des équations*, où l'on peut arriver par des procédés mathématiques.

En général, résoudre une ou plusieurs équations d'un degré quelconque à une ou à plusieurs inconnues, c'est déterminer, pour ces inconnues, toutes les valeurs, qui, mises à leur place dans les équations, rendent le premier membre égal au second. Quand on effectue, après la substitution, toutes les opérations indiquées, et que les deux membres de chaque équation sont égaux, on obtient alors des *identités* (13), et l'on dit que les équations sont *satisfaites*.

63. Voici maintenant deux principes utiles dans la résolution des équations de tous les degrés, et suffisants, par les con-

séquences qu'on en déduit, pour résoudre celles du premier degré.

1° *On peut, sans altérer les valeurs des inconnues, ajouter une même quantité aux deux membres d'une équation, ou l'en retrancher.*

Il est clair que les valeurs des inconnues, qui satisfont à l'une, satisferont à l'autre.

D'où il résulte *qu'on peut transposer un terme d'un membre de l'équation dans l'autre, en l'écrivant dans celui-ci avec un signe contraire à celui qu'il avait d'abord.* Car cela se réduit à ajouter aux deux membres le même terme pris avec un signe contraire.

2° *On peut, sans altérer les valeurs des inconnues, multiplier ou diviser les deux membres d'une équation par une même quantité indépendante des inconnues.* La raison en est la même que dans le cas ci-dessus.

Il est clair que la quantité, par laquelle on multiplie les deux membres, ne peut être ni nulle, ni infinie. En outre, si elle contenait l'inconnue, le principe pourrait ne plus être exact. Car si l'on a, par exemple, l'équation $4x-2=b$, et qu'on multiplie les deux membres par $x-1$, il viendra l'équation

$$(4x-2)(x-1)=6(x-1),$$

qui est satisfaite par $x=1$; or, cette valeur de x ne satisfait pas à l'équation primitive.

Si l'on multiplie les deux membres d'une équation par -1, tous ses termes changeront de signe. On peut donc leur faire subir ce changement, qui revient d'ailleurs à transposer tous les termes d'un membre dans l'autre. On peut encore mettre tous les termes d'une équation dans un seul membre, ou bien aussi dans un membre tous les termes renfermant l'inconnue, et dans l'autre les termes tout connus.

64. Il résulte du même principe qu'on peut faire disparaître tous les dénominateurs qui se trouvent dans les termes d'une équation. Car il suffit pour cela de multiplier les deux membres par une même quantité divisible par chaque déno-

minateur, et qu'on prend, pour être la plus simple possible, égale à leur plus petit commun dividende (59); alors toutes les divisions indiquées doivent se faire exactement. Mais on simplifie l'opération en ne multipliant les numérateurs des termes fractionnaires que par les quotients du plus petit commun dividende successivement divisé par leurs dénominateurs respectifs, absolument comme pour réduire des fractions au même dénominateur (59).

De là se déduit la règle suivante:

Règle générale. *Pour faire disparaître tous les dénominateurs d'une équation, il faut multiplier tous les termes entiers par le plus petit commun dividende de tous les dénominateurs, et le numérateur de chaque terme fractionnaire par le quotient de ce plus petit commun dividende par le dénominateur du même terme.*

1° Soit l'équation $\frac{ax}{b}+c=\frac{3c}{d}+\frac{2x}{5}$; comme dans ce cas le produit des trois dénominateurs b, d, 5, est en même temps leur plus petit commun dividende, il faut multiplier les termes entiers par $5bd$, et chaque numérateur par le produit des deux dénominateurs autres que le sien; ce qui donne

$$5adx+5bcd=15bc+2bdx.$$

2° Soit $\frac{ax}{3c^2}-\frac{a}{15b^2c}=d+\frac{ex}{4bc}$. Le plus petit commun dividende est $3.4.5b^2c^2$ ou $60b^2c^2$, et, d'après la règle ci-dessus, l'équation proposée deviendra

$$20ab^2x-4ac=60b^2c^2d+15bcex.$$

§ 2. *Résolution des équations du premier degré à une inconnue.*

65. Appliquons les principes précédents à la résolution des équations du premier degré à une inconnue, et prenons d'abord des équations numériques.

Soit l'équation $3x-24=18-4x$; en transposant $-4x$ dans le premier membre, et -24 dans le second, il vient

$$3x+4x=18+24 \text{ ou } 7x=42;$$

et en divisant les deux membres par 7, on trouve $x=6$.

Ce résultat nous apprend que l'inconnue x a 6 pour valeur. Car les trois équations successivement déduites de l'équation proposée, d'après les principes exposés plus haut (63), doivent avoir la même valeur de x que la première. En outre, il est clair que la dernière $x=6$ est satisfaite ou devient une identité, lorsqu'on substitue 6 à la place de x, et que tout autre nombre plus grand ou plus petit que 6 ne rendrait pas cette équation identique.

Vérification. Pour s'assurer de l'exactitude des calculs, on remplace l'inconnue x par 6 dans l'équation proposée, et l'on voit si, en effectuant les opérations indiquées, on obtient une identité. La substitution donne successivement

$$3.6-24=18-4.6,$$
$$18-24=18-24,$$
$$-6=-6.$$

La valeur de l'inconnue est donc 6.

66. Soit encore l'équation $\frac{5x}{12}-\frac{2}{3}=\frac{3x}{8}-1$.

Le plus petit commun dividende des trois dénominateurs est 24, et l'on trouve successivement

$$10x-16=9x-24,$$
$$10x-9x=16-24,$$
$$x=-8.$$

Employant le même raisonnement que ci-dessus, on verra que la valeur de l'inconnue est la quantité négative -8.

Vérification. Mettant -8 à la place de x dans l'équation, on a successivement

$$\frac{5.(-8)}{12}-\frac{2}{3}=\frac{3.(-8)}{8}-1,$$
$$-\frac{40}{12}-\frac{2}{3}=-\frac{24}{8}-1,$$
$$-\frac{80}{24}-\frac{16}{24}=-\frac{72}{24}-\frac{24}{24},$$
$$-\frac{96}{24}=-\frac{96}{24}.$$

67. Prenons maintenant l'équation littérale suivante, qui est un peu plus compliquée :

$$\frac{ax}{a-b}+4b=\frac{ax}{3a+b}-\frac{b}{a^2-b^2}.$$

Comme a^2-b^2 se décompose en $(a+b)(a-b)$, le plus petit commun dividende de tous les dénominateurs sera

$$(a^2-b^2)(3a+b).$$

Alors la règle prescrite donne

$$a(a+b)(3a+b)x+4b(a^2-b^2)(3a+b)=$$
$$ax(a^2-b^2)-b(3a+b).$$

Effectuant les multiplications indiquées, il vient

$$(3a^3+4a^2b+ab^2)x+12a^3b-12ab^3+4a^2b^2-4b^4=$$
$$a^3x-ab^2x-3ab-b^2,$$

ou, en transposant les termes en x dans le premier membre, et les termes sans x dans le second,

$$(3a^3+4a^2b+ab^2-a^3+ab^2)x=-12a^3b+12ab^3-4a^2b^2+4b^4-3ab-b^2;$$

réduisant on trouve

$$(2a^3+4a^2b+2ab^2)x=-12a^3b-4a^2b^2+3(4b^2-1)ab-(1-4b^2)b^2,$$

d'où $$x=\frac{-12a^3b-4a^2b^2+3(4b^2-1)ab-(1-4b^2)b^2}{2a^3+4a^2b+2ab^2}.$$

68. On peut déduire des raisonnements et des exemples précédents la règle suivante :

Règle générale. *Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue, il faut 1° effectuer toutes les opérations indiquées ; 2° faire disparaître tous les dénominateurs lorsqu'il s'en trouve, en cherchant, comme on l'a expliqué, leur plus petit commun dividende ; 3° transposer dans le premier membre les termes dont l'inconnue fait partie, et dans le second les termes qui en sont indépendants ; 4° mettre le premier membre sous la forme d'un produit dont l'inconnue soit l'un des facteurs, et diviser les deux membres par l'autre facteur qui est le coefficient de l'inconnue.*

§ 3. *Discussion de l'équation du premier degré à une inconnue. Symboles* $\frac{m}{0}$, $\frac{0}{0}$.

69. Toute équation du premier degré à une inconnue peut se ramener à la forme $ax=b$. Car après avoir, d'après la règle précédente, réuni dans le premier membre tous les termes contenant l'inconnue, et dans le second tous ceux qui en sont indépendants, on peut représenter par a la somme des quantités qui multiplient l'inconnue, et par b le deuxième membre, ce qui donne $ax=b$, d'où $x=\frac{b}{a}$.

D'abord l'équation $ax=b$ n'a qu'une solution; car soit $x=m$, on aura $am=b$, et si l'on représente par $\pm d$ la quantité qu'il faut ajouter à m pour avoir les autres valeurs de x, on aura de même $am\pm ad=b$; mais on a déjà $am=b$, donc $\pm ad=0$, et puisque a n'est pas nul, il en résulte que $\pm d=0$. Donc il n'y a qu'une seule valeur de x qui puisse satisfaire à l'équation.

1° Si a et b sont de même signe, la valeur de x, qui égale leur quotient, sera positive, et satisfera naturellement à l'équation, ainsi qu'aux conditions de la question dont celle-ci n'est que la traduction algébrique. Il peut arriver cependant qu'outre ces conditions le problème en contienne d'autres exprimées ou sous-entendues, non susceptibles d'être introduites dans l'équation. Alors la solution trouvée pourrait ne pas satisfaire à ces dernières conditions. Dans ce cas, le problème, tel qu'il a été proposé, sera complétement impossible.

La question suivante en offre un exemple:

Un berger à qui l'on demande combien il a de moutons, répond: J'ai mis le tiers de mon troupeau dans un pré, un quart le long de la grande route, et 3 malades sont restés au parc; de combien de moutons se compose le troupeau?

L'équation du problème est

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{3}+3=x, \quad \text{ou} \quad 3x+4x+12.3=12x, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{36}{5}.$$

Le problème est évidemment impossible.

2° Si a et b sont de signes contraires, la valeur de l'inconnue sera négative, et quoiqu'elle satisfasse toujours à l'équation, souvent il n'en sera pas de même par rapport à la question dont elle devra faire modifier l'énoncé ou les conditions.

Par exemple, a et b représentant des nombres, si a est positif et b négatif, l'équation devient $ax=-b$, d'où $x=-\frac{b}{a}$; substituant $-\frac{b}{a}$ au lieu de x dans l'équation, il vient $a.-\frac{b}{a}=-b$, d'où résulte l'identité $-\frac{b}{a}=-\frac{b}{a}$, et par conséquent la preuve que $-\frac{b}{a}$ est bien la valeur de x. Or, de l'équation $ax=-b$, on tire $ax+b=0$, qui est la traduction algébrique de la question suivante : *trouver un nombre tel qu'en le multipliant par le nombre* a, *et ajoutant au produit le nombre* b, *la somme soit nulle.* Il est évident que la question est absurde ; aussi la valeur négative de l'inconnue avertit que le problème est impossible dans le sens de son énoncé; et comme, en outre, elle rend le produit ax négatif, elle montre par là qu'on doit, non ajouter ce produit au nombre b, mais l'en retrancher, et par conséquent changer l'énoncé de la question en cet autre: *trouver un nombre tel qu'en retranchant son produit par un nombre donné* a *d'un autre nombre donné* b, *la différence soit nulle*, ou, ce qui revient au même, *trouver un nombre dont le produit par le nombre* a *soit égal au nombre* b. Ce nouvel énoncé contient, sans altération, les mêmes quantités a et b que l'énoncé primitif; mais le produit de a par l'inconnue, qui était d'abord désigné comme devant être ajouté, a été indiqué à retrancher. Le second énoncé conduit à l'équation $b-ax=0$, ou $ax=b$, qui donne toujours pour x la même valeur absolue $\frac{b}{a}$, mais prise positivement, et cette valeur positive satisfait à la fois à l'équation et aux conditions exprimées par le nouvel énoncé.

D'ailleurs il est clair que si l'on substitue à x dans l'équation du premier énoncé la valeur négative $-\frac{b}{a}$, on aura exactement le même résultat que si l'on remplace d'abord x par $-x$, et qu'on substitue ensuite à la place de x la valeur $+\frac{b}{a}$.

Ainsi, en général, lorsque l'énoncé d'un problème veut que l'inconnue x soit positive, et que l'équation conduit à une valeur négative, on doit regarder le problème comme impossible dans le sens de son énoncé. Alors, pour le rectifier, on remplace, dans l'équation, x par $-x$, ce qui change le signe des termes où entre l'inconnue, et l'on modifie l'énoncé de manière à y introduire les rectifications nécessitées par le changement de signe de l'inconnue dans l'équation, sans altérer, bien entendu, les quantités données, et en se rapprochant le plus possible de l'énoncé primitif.

Ici nous avons mis à dessein le mot *en général*, parce qu'il peut arriver qu'il faille, pour résoudre une question, faire une certaine supposition. Dans ce cas, la valeur négative de l'inconnue indique ordinairement qu'on doit, non changer le sens de l'énoncé de la question, mais prendre en sens contraire la supposition faite pour la mise en équation. Le problème des courriers (81) offre une application remarquable de cette observation.

Cette théorie des solutions négatives est parfaitement d'accord avec la manière dont nous avons envisagé les quantités négatives (n° 14 et suivants).

70. Passons aux cas où l'une des quantités a et b devient nulle, et supposons d'abord $b=0$; la valeur $x=\frac{b}{a}$ devient $x=\frac{0}{a}=0$. Substituant à x cette valeur dans l'équation $ax=0$, il vient $a.0=0$, ou $0=0$; ainsi la solution $x=0$ satisfait à l'équation, et, en général, aux conditions du problème, sauf les cas d'exception signalés plus haut (69, 1°).

Si, par exemple, on cherche quelle somme on doit à

quelqu'un après certaines opérations de commerce, et qu'on trouve $x=0$, cela signifie qu'on ne doit rien.

71. Supposons maintenant $a=0$. La valeur de l'inconnue $x=\frac{b}{a}$ devient $x=\frac{b}{0}$, et l'équation $ax=b$ devient $0.x=b$, qui est la traduction algébrique de la question suivante : *trouver une quantité telle qu'en la multipliant par zéro, le produit égale une quantité donnée* b. Le problème est évidemment impossible, et la valeur de l'inconnue $\frac{b}{0}$, qu'on déduit de l'équation, indique cette impossibilité.

En général, lorsqu'on a mis un problème en équation, et que la valeur de l'inconnue se présente sous la forme $\frac{b}{0}$, cela montre que le problème est impossible, et n'est pas susceptible de solution. Cependant cette valeur de la forme $\frac{b}{0}$ peut, dans certains cas, fournir une sorte de réponse à la question proposée.

En effet, concevons qu'au lieu de faire, dans l'équation ci-dessus, tout d'un coup $a=0$, on lui donne successivement des valeurs de plus en plus petites, par exemple, $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$,... alors les valeurs correspondantes de x seront $10b$, $100b$, $1000b$,.. de sorte qu'on finira par obtenir pour x une valeur aussi grande qu'on le voudra. Il suit de là que la véritable valeur de x, si elle pouvait exister, devrait être plus grande que toute quantité assignable. C'est ce qu'on énonce d'une manière abrégée, en disant que le quotient d'une quantité divisée par zéro est *infiniment grand* ou *infini*. L'infini ou son symbole est donc le dernier état d'une grandeur qui croît indéfiniment ; on est convenu de le représenter par le signe ∞.

Lorsque la solution d'un problème dépend d'une construction géométrique, il arrive souvent que la valeur infinie de l'inconnue correspond à une construction déterminée. Si, par exemple, étant donnés une droite AB, un point A sur AB, et un point C hors de AB, la distance d'un point inconnu R de

AB au point A doit être déterminée par l'intersection de AB avec une droite menée par le point C, il est clair que plus l'angle des deux droites diminuera, plus leur point de rencontre R s'éloignera, et par conséquent plus la distance du point R au point A augmentera; si l'angle des deux droites devient plus petit que toute quantité donnée ou bien nul, la distance AR deviendra plus grande que toute quantité donnée ou infinie, c'est-à-dire que les droites ne se rencontreront plus et seront par conséquent parallèles. Ce cas est indiqué par la valeur de l'inconnue qui se présente sous la forme $\frac{a}{0}$ symbole de l'infini, et indique que la droite CR doit alors être menée par le point C parallèlement à la droite AB. De même lorsqu'un angle est déterminé par sa tangente, et que l'on trouve pour celle-ci une valeur infinie, cela signifie que l'angle est droit.

72. Dans ce qui précède, on n'a considéré la valeur $x=\frac{b}{0}$ que d'une manière absolue, c'est-à-dire, sans avoir égard au signe dont elle pouvait être affectée. Or, cette valeur infinie peut être considérée comme positive, comme négative, ou comme pouvant être indifféremment positive ou négative, ce qu'on indique respectivement par $+\infty$, $-\infty$, $\pm\infty$.

Si, par exemple, la quantité a était d'abord de la forme $(m-n)^2$, expression rendue nulle par la supposition de $m=n$, alors la valeur de x était donnée par l'équation

$$x=\frac{b}{(m-n)^2};$$

or, quel que soit le signe des quantités m et n, si b est positif, on aura toujours $x=+\infty$, ou l'infini positif, et si b est négatif, on aura de même $x=-\infty$, ou l'infini négatif.

Mais si la quantité a, au lieu de représenter l'expression $(m-n)^2$, représentait seulement $m-n$, on aurait $x=\frac{b}{m-n}$. Alors b et m étant des quantités constantes et positives, si l'on fait $m=n$, il vient $x=\frac{b}{0}$. Or, ici la valeur infinie de l'incon-

nue peut être positive ou négative, selon que la quantité n était d'abord plus petite ou plus grande que m, et lui est devenue égale en recevant des valeurs croissantes ou décroissantes, ce qui donnait à l'inconnue des valeurs croissantes, mais positives dans le premier cas, et négatives dans le second. C'est pour cela qu'on indique cette double circonstance en écrivant $x = \pm \infty$.

73. Supposons maintenant que dans l'équation $ax = b$ on ait $a = \infty$, la valeur de l'inconnue sera donnée par $x = \frac{b}{\infty}$. Pour voir ce que peut signifier une telle expression, il faut se rappeler qu'une fraction prenant des valeurs de plus en plus petites, à mesure que son dénominateur augmente, si le dénominateur devient plus grand que toute quantité donnée, c'est-à-dire infini, la fraction deviendra plus petite que toute quantité donnée, c'est-à-dire zéro. Donc $\frac{b}{\infty} = 0$.

Ce résultat montre que le problème est impossible. En effet, l'équation devient alors $\infty \,.\, x = b$; or, on ne peut trouver une quantité telle, qu'en la multipliant par l'infini, le produit soit une quantité finie.

De même si $a = -\infty$, on a $x = -0$. Le signe $+$ ou $-$, mis devant 0, indique si la valeur nulle de l'inconnue provient d'une quantité positive ou négative décroissant jusqu'à 0.

74. Supposons enfin qu'on ait à la fois $a = 0$, $b = 0$; l'équation $x = \frac{b}{a}$ devient $x = \frac{0}{0}$. Or, par quelque nombre que l'on multiplie zéro, le quotient est toujours égal à zéro; donc l'inconnue peut recevoir telle valeur qu'on voudra lui donner, et par conséquent le problème est indéterminé. En effet, si l'on fait les mêmes suppositions dans l'équation $ax = b$, on trouve $0.x = 0$, qui est la traduction algébrique de la question suivante : *trouver une quantité telle qu'en la multipliant par zéro, le produit soit zéro.* Il est bien clair que toutes les quantités possibles satisfont à la question, qui est par conséquent indéterminée, comme l'indique en effet la valeur $\frac{0}{0}$ de l'inconnue.

75. Il est encore d'autres signes auxquels on reconnaît qu'un problème est indéterminé. Supposons que a et b représentent des quantités fractionnaires, et qu'on ait, par exemple, $a=\frac{1}{m}$, $b=\frac{1}{n}$, m et n étant des quantités entières. Le calcul donne $x=\frac{b}{a}$, ou $x=b.\frac{1}{a}$, ou enfin $x=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{m}}=\frac{m}{n}$. Or quand a et b deviennent nuls, la valeur $x=\frac{b}{a}$ devient $x=\frac{0}{0}$ et la valeur $x=b.\frac{1}{a}$ devient $x=0.\infty$; mais comme de $a=\frac{1}{m}$ et $b=\frac{1}{n}$, on tire $m=\frac{1}{a}$, $n=\frac{1}{b}$, expressions qui deviennent infinies quand a et b sont nuls, la valeur $x=\frac{m}{n}$ devient alors $x=\frac{\infty}{\infty}$. Ces trois valeurs de x étant nécessairement égales, on a $x=\frac{0}{0}=0.\infty=\frac{\infty}{\infty}$, d'où il résulte que les deux expressions $0.\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ sont deux autres symboles de l'indétermination.

76. Il est fort essentiel de faire observer que la valeur de l'inconnue peut se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$, sans que pour cela la question soit indéterminée, et que, par conséquent, $\frac{0}{0}$ n'est pas toujours un symbole d'indétermination. Si la fraction $\frac{b}{a}$ est irréductible, c'est-à-dire, si ses deux termes n'ont pas de facteur commun, les suppositions qui font décroître indéfiniment l'un des termes jusqu'à la limite où il devient nul, sont tout à fait indépendantes des suppositions qui font décroître indéfiniment l'autre terme jusqu'à ce qu'il devienne également nul, et alors la fraction résultante $\frac{0}{0}$ est le symbole d'une indétermination complète.

Mais lorsque les deux termes de la fraction représentée par $\frac{b}{a}$ ont un facteur commun, qui, devenant nul par une seule supposition, donne à la fraction $\frac{b}{a}$ la forme $\frac{0}{0}$, il est clair que si l'on supprime le facteur commun aux deux termes avant d'introduire cette supposition, elle ne rendra plus ces termes nuls. Soit $b=p\,(m^2-n^2)$, et $a=q\,(m-n)$, on aura

$$x=\frac{p(m^2-n^2)}{q(m-n)};\quad \text{or}\quad m^2-n^2=(m+n)\,(m-n).$$

La valeur de x peut donc se mettre sous la forme

$$x=\frac{p(m+n)\,(m-n)}{q(m-n)},$$

ou, en supprimant le facteur commun $m-n$, $x=\frac{p(m+n)}{q}$. Si l'on fait $n=m$ dans la première valeur de l'inconnue, elle devient $x=\frac{0}{0}$, et par conséquent devrait être indéterminée; mais si l'on fait $n=m$ dans la deuxième valeur, qui n'est autre chose que la première réduite, on trouve pour x une quantité déterminée $\frac{2pm}{q}$. Ceci s'explique très-bien en concevant que si, au lieu de faire $n=m$ dans les deux équations, on avait d'abord substitué à n des valeurs successivement croissantes et se rapprochant de plus en plus de la quantité m, le numérateur $p\,(m+n)\,(m-n)$ aurait reçu des valeurs successives de plus en plus petites à cause du facteur $m-n$ s'approchant de plus en plus de zéro, et le dénominateur $q\,(m-n)$ aurait reçu autant de valeurs correspondantes également décroissantes; par suite, on aurait eu successivement pour l'inconnue différentes valeurs toutes déterminées, et respectivement égales à celles que les mêmes substitutions auraient fait déduire de la deuxième équation, celle-ci n'étant autre chose que la première simplifiée. Par conséquent, ces valeurs de l'inconnue, ou du rapport des deux termes de la fraction, convergeant graduellement vers la limite déterminée $\frac{2pm}{q}$, cette quantité doit être consi-

dérée comme étant bien réellement la valeur de x qui correspond à $n=m$. Mais comme, dans la première équation, le rapport des deux termes de la fraction n'atteint cette limite qu'au moment où, les deux termes devenant nuls, ce rapport se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, il faut, pour obtenir la valeur de x, avoir recours à la deuxième équation débarrassée du facteur commun; d'où il résulte que

Une expression fractionnaire, qui prend la forme $\frac{0}{0}$ par suite d'une certaine supposition unique, ne doit pas pour cela être regardée comme indéterminée, mais comme ayant au numérateur et au dénominateur un facteur commun, qui, en devenant zéro par suite de la même supposition, donne à la fraction la forme $\frac{0}{0}$. Il faut donc chercher ce facteur commun et le supprimer avant d'introduire dans la fraction l'hypothèse dont il s'agit, laquelle fera connaître alors la véritable valeur de la fraction.

Soient les fractions $\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$, $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$, $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$, qui deviennent $\frac{0}{0}$ pour $b=a$. Comme $a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$, et $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$, les trois fractions peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \text{ ou } a^2+b^2, \quad \frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a-b}{a+b},$$

$$\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b};$$

or, si l'on fait $b=a$ dans les fractions réduites, elles deviennent respectivement $2a^2$, 0, $\pm\infty$.

§ 4. *Problèmes du premier degré à une inconnue.*

77. Appliquons les principes précédents à quelques problèmes, et pour mieux faire voir les avantages de l'Algèbre, traitons d'abord généralement plusieurs des questions résolues dans notre Arithmétique.

PROBLÈME I. *Quel est le nombre dont la moitié, le tiers, le quart, le cinquième et le sixième font une somme égale à un nombre donné?*

Soit a le nombre donné, et x le nombre inconnu; on aura évidemment $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{6}=a$. Les dénominateurs pouvant se mettre sous la forme 2, 3, 2^2, 5, 2.3, leur plus petit commun dividende est $2.3.2^2.5=120$. Appliquant la règle donnée plus haut (64), l'équation ci-dessus devient

$$60x+40x+30x+24x+20x=120a, \text{ ou } 174x=120a,$$

d'où

$$x=\frac{120a}{174}.$$

Si $a=522$, on trouve $x=360$ (voyez notre Arith., n° 211).

78. PROBLÈME II. *Deux fontaines coulent uniformément dans un bassin, et chacune coulant seule le remplirait dans un temps connu. Combien faudra-t-il de temps pour le remplir, les deux fontaines coulant à la fois?*

Représentons par a le nombre d'heures qu'il faut à la première fontaine, coulant seule, pour remplir le bassin; par b celui qu'il faut à la seconde, et par x le temps nécessaire aux deux fontaines coulant à la fois.

Si ce temps était déterminé, on le vérifierait en calculant la partie du bassin que remplit chaque fontaine coulant seule pendant ce même temps, et l'on s'assurerait que l'ensemble de ces deux parties forme la capacité entière du bassin.

Prenons cette capacité du bassin pour unité; la première fontaine le remplissant seule dans a heures, en remplit dans 1 heure la portion $\frac{1}{a}$, et, par conséquent, dans x heures, la portion $\frac{x}{a}$; de même la deuxième fontaine remplit en x heures la portion $\frac{x}{b}$.

Ces deux portions devant former la totalité du bassin, on a

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1, \quad \text{d'où} \quad bx+ax=ab, \quad \text{et} \quad x=\frac{ab}{a+b}.$$

Si $a=2^h\frac{1}{3}$ et $b=3^h\frac{3}{4}$, on trouve $x=1^h\frac{32}{73}$ (Arith., n° 199).

Les quantités $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{b}$, sont aussi les quatrièmes termes des proportions $a:x::1:\frac{x}{a}$, $b:x::1:\frac{x}{b}$.

79. Problème iii. *On demande l'intérêt d'un capital placé à un certain taux pendant un certain nombre d'années, en n'ayant égard qu'aux intérêts simples?*

Soit a le capital exprimé en francs, t le nombre d'années qu'il reste placé, r son intérêt au bout de ce temps, et i l'intérêt de 100 fr. par an.

On aura $100:a::i:\frac{ai}{100}$, qui représentera l'intérêt du capital au bout de l'année; par conséquent, au bout d'un nombre t d'années, l'intérêt sera donné par l'équation $r=\frac{ait}{100}$ (voyez notre Arith., n° 214).

Cette formule sert à résoudre toutes les questions relatives aux intérêts simples. Soit, par exemple, le problème suivant : *Pendant combien de temps faut-il placer* 41 360f *à* 5 *p.* °/₀ *pour avoir* 1551 *fr. d'intérêt?*

La formule précédente donne $t=\frac{100r}{ai}$; remplaçant les lettres r, a, i par leurs valeurs, on aura $t=\frac{100.1551}{41\,360.5}=\frac{1551}{2068}=\frac{3}{4}$ d'année ou 9 mois (voyez notre Arith., n° 205).

80. Examinons maintenant comment les différents cas, signalés dans la discussion de l'équation générale du premier degré à une inconnue, modifient les questions où ils se rencontrent, et prenons pour exemple le problème des courriers, en commençant par résoudre le cas particulier traité dans notre Arithmétique (n° 211).

Problème iv (cas particulier). *Deux courriers vont dans le même sens et avec des vitesses constantes; le premier a une avance de* 25 *myriamètres, fait* 2 *myriamètres en* 3 *heures, et part* 30 *heures avant le second, qui fait* 3 *myriamètres en*

4 heures; on demande dans combien d'heures le second atteindra le premier, et à quelle distance du point de départ?

M B A R N

Supposons le premier courrier partant du point A, dans le sens AN, 30 heures avant le second courrier partant du point B, dans le même sens. Représentons par x la distance AR que parcourt le premier courrier avant d'être atteint au point de rencontre R; comme il fait 2 myriamètres en 3 heures, ou $\frac{2}{3}$ de myriamètre en 1 heure, il aura marché pendant un nombre d'heures exprimé par $\frac{x}{\frac{2}{3}}$: le second courrier, parti 30 heures après le premier, parcourt la distance $BR = BA + AR$, ou $25 + x$, avec une vitesse de 3 myriamètres en 4 heures ou $\frac{3}{4}$ de myriamètre en 1 heure; par conséquent il marche pendant un nombre d'heures exprimé par $\frac{25 + x}{\frac{3}{4}}$.

Le premier courrier ayant marché 30 heures de plus que le second, on aura

$$\frac{x}{\frac{2}{3}} = 30 + \frac{25 + x}{\frac{3}{4}},$$

d'où l'on tire $\quad \frac{3}{4}x = 30 . \frac{2}{3} . \frac{3}{4} + (25 + x)\frac{2}{3},$

ou $\quad 3.3.x = 30.2.3 + (25 + x)2.4;$

faisant passer dans le premier membre les termes en x, il vient $\quad 9x - 8x = 30.2.3 + 25.2.4,$

et enfin $\quad x = 180 + 200 = 380.$

Ainsi le premier courrier fait, avant d'être atteint, 380 myriamètres dans un temps exprimé par $\frac{380}{\frac{2}{3}}$ ou 570 heures, et

le second courrier aura fait 405 myriamètres dans un temps exprimé par $\frac{25+380}{\frac{3}{4}}$ ou 540 heures; en effet, il part 30 heures après le premier courrier, et $570-540=30$ (voyez notre Arith., n° 211, II).

On peut aussi bien représenter par x le nombre d'heures que le second courrier met à atteindre le premier. Alors le premier courrier aura marché pendant un nombre d'heures égal à $30+x$, et parcouru $(30+x)\frac{2}{3}$ de myriamètre; le second courrier aura fait $\frac{3}{4}x$ myriamètres : or, le chemin du second courrier égale le chemin du premier courrier plus 25 myriamètres. On aura donc

$$\frac{3}{4}x=25+(30+x)\frac{2}{3}$$

d'où l'on tire successivement

$$3.3x=25.4.3+(30+x)2.4,$$
$$9x-8x=25.4.3+30.2.4,$$
$$x=300+240=540.$$

Ainsi le second courrier atteindra le premier en 540 heures, comme précédemment.

81. Le problème qu'on vient de résoudre n'est qu'un cas particulier du problème général suivant, que nous désignerons toujours par le chiffre IV.

PROBLÈME IV. *Deux courriers parcourent uniformément la même route indéfinie* MN, *dans le sens* MN. *Le premier fait* v *myriamètres par heure, et le second* v' *myriamètres; le premier courrier arrive au point* A *un nombre* h *d'heures avant que le second courrier arrive au point* B *situé à une distance* d *du point* A; *on demande en quel point de la route les courriers se rencontreront?*

M R'' A R' B R N

Les courriers marchant tous deux dans la direction MN, il

est clair que leur rencontre ne peut avoir lieu, selon les circonstances, que dans l'une des trois positions suivantes : soit en un point R situé au delà du point B, c'est-à-dire dans la portion BN commençant au point B, et de là s'étendant indéfiniment vers N; soit en un point R' situé entre les points A et B; soit enfin en un point R'' situé en deçà du point A, c'est-à-dire dans la portion indéfinie MA aboutissant au point A.

Ier CAS. — Supposons le point de rencontre situé en R dans la partie BN; soit x la distance inconnue BR, et AB $= d$; la distance AR sera $d+x$. Comme v et v' représentent les vitesses des courriers, c'est-à-dire le nombre de myriamètres qu'ils font par heure, le premier mettra un temps $\frac{d+x}{v}$ à parcourir le chemin $d+x$, et le second un temps $\frac{x}{v'}$ à parcourir le chemin x. Mais l'arrivée du premier courrier au point A ayant précédé de h heures celle du second au point B, il en résulte que le temps $\frac{d+x}{v}$, employé par le premier courrier pour venir au point de rencontre R, surpasse de h heures le temps $\frac{x}{v'}$ employé par le second courrier pour atteindre le point R, ce qui donne l'équation

$$(1) \qquad \frac{d+x}{v} - \frac{x}{v'} = h;$$

d'où l'on tire successivement

$$v'd + v'x - vx = vv'h$$
$$vx - v'x = v'd - vv'h$$
$$x = \frac{v'(d - vh)}{v - v'}.$$

Voyons ce que signifie la valeur de x dans les différentes suppositions qu'on peut faire sur les quantités dont elle se compose:

1° Tant que l'on a en même temps $v > v'$ et $d > vh$, la valeur de x est positive, et la rencontre des deux courriers a bien lieu au delà du point B, en un point de la portion BN, comme

on l'a supposé pour la mise en équation. Or il est aisé de voir qu'il doit en être ainsi, d'après l'énoncé de la question ; car le produit vh exprime le chemin que le premier courrier parcourt pendant le temps h, dont son arrivée au point A devance celle du second courrier au point B ; ce chemin étant plus petit que la distance AB, et la vitesse v du premier courrier étant plus grande que la vitesse v' du second, il résulte de cette double condition que le premier courrier n'est pas encore arrivé en B, quand le second courrier s'y trouve, et que, par conséquent, comme il va plus vite que lui, il l'atteindra au delà du point B.

2° Si l'on a en même temps $v < v'$ et $d < vh$, la valeur de x est encore positive, et la rencontre des courriers a également lieu au delà du point B. Ceci s'accorde avec l'énoncé de la question ; car, de la condition $d < vh$, il résulte que le premier courrier a parcouru un espace plus grand que AB, c'est-à-dire a dépassé le point B au moment où le second courrier y arrive, et la condition $v < v'$ apprend que celui-ci l'atteindra en allant de B vers N.

On voit que cette supposition rentre tout à fait dans la première.

3° Si l'on a en même temps $v > v'$ et $d < vh$, ou bien $v < v'$ et $d > vh$, la valeur de x, devenant négative, ne satisfait plus (69) à la supposition faite pour la mise en équation, et montre que la rencontre des courriers ne peut plus avoir lieu dans la portion BN, c'est-à-dire au delà du point B pris pour origine des distances, comme on l'avait d'abord supposé.

C'est ce qu'on peut, au reste, vérifier directement ; car lorsqu'on a en même temps $v > v'$ et $d < vh$, la distance vh, parcourue par le premier courrier pendant le temps h, dont il devance au point A l'arrivée du second courrier au point B, étant plus grande que d ou AB, le premier courrier a dépassé le point B, lorsque le second ne l'a pas encore atteint, et comme le premier a la plus grande vitesse, il est clair que les courriers ne peuvent plus se rencontrer dans la portion BN.

Il en est encore de même, lorsqu'on a en même temps $v < v'$ et $d > vh$. Car alors la distance vh, parcourue par le premier courrier pendant le temps h, dont il devance au point A l'ar-

rivée du second au point B, étant plus petite que d ou AB, le premier courrier n'a pas encore atteint le point B, lorsque le second l'a dépassé; et comme le premier a la plus petite vitesse, il est clair que les courriers ne peuvent plus se rencontrer dans la portion BN.

Voyons si, dans l'une ou l'autre de ces deux suppositions, la rencontre peut avoir lieu entre les points A et B; ce qui nous conduit à examiner le second des cas indiqués plus haut.

IIe CAS. — Supposons le point de rencontre situé en R′ entre les points A et B. Soit x la distance inconnue BR′; la distance AR′ sera $d-x$. Le premier courrier mettra un temps $\frac{d-x}{v}$ pour aller de A en R′, et le second un temps $\frac{x}{v'}$ pour aller de R′ en B. La somme de ces temps devant égaler h, on aura

(2) $$\frac{d-x}{v}+\frac{x}{v'}=h.$$

Or, cette nouvelle équation ne diffère de l'équation notée (1) que par le changement de signe de x; par conséquent, la valeur qu'elle donnera pour x sera égale, mais de signe contraire, à la valeur fournie par l'équation (1).

On trouve, en effet,

$$x=-\frac{v'(d-vh)}{v-v'},$$

valeur qui sera positive toutes les fois que la valeur fournie par l'équation (1) sera négative, c'est-à-dire tant qu'on aura à la fois $v>v'$ et $d<vh$, ou bien $v<v'$ et $d>vh$. Mais cela ne suffit pas pour que la rencontre ait lieu entre les points A et B, car on a supposé tacitement $x<d$, et par conséquent $d-x$ positif : de sorte que si la valeur de $d-x$ se trouvait être négative, la rencontre des courriers ne pourrait pas avoir lieu entre A et B. Or, si l'on calcule la valeur de $d-x$, pour voir dans quelles circonstances elle est réellement positive, on trouve

$$d-x=d+\frac{v'(d-vh)}{v-v'},$$

ou, en réduisant le second membre au même dénominateur,

$$d-x=\frac{v(d-v'h)}{v-v'};$$

d'où il résulte que $d-x$ sera positif, tant qu'on aura à la fois $v'h<d$ et $v'<v$, ou bien $v'h>d$ et $v'>v$. En effet, il est facile de vérifier que dans les hypothèses qui rendent à la fois x et $d-x$ positifs, les courriers doivent se rencontrer entre A et B au point R′ déterminé par la valeur de x. Car pour aller de A en R′, le premier courrier met un temps $\frac{d-x}{v}$ ou $\frac{d-v'h}{v-v'}$; ce temps, retranché de h, donne la différence

$$h-\frac{(d-v'h)}{v-v'}=-\frac{(d-vh)}{v-v'}.$$

Ainsi à l'origine de cette différence de temps, le second courrier se trouvait encore à une distance du point B égale à $\frac{-v'(d-vh)}{v-v'}$, qui est précisément la valeur trouvée pour x. D'où il résulte que le second courrier était au point R′ en même temps que le premier, ce qui vérifie l'exactitude de la discussion ci-dessus.

La rencontre ne pouvant pas avoir lieu entre A et B, lorsque $d-x$ est négatif, voyons si cette rencontre peut alors s'effectuer en deçà du point A, ce qui nous conduit à examiner le troisième des cas indiqués plus haut.

III[e] CAS. — Supposons donc le point de rencontre situé en R″ en deçà du point A. Soit x la distance inconnue BR″; la distance AR″ sera $x-d$. Le premier courrier mettra un temps $\frac{x-d}{v}$ pour arriver au point A, et le second un temps $\frac{x}{v'}$ pour arriver au point B. La différence de ces temps devant égaler h, on aura $\frac{x}{v'}-\frac{(x-d)}{v}=h$. Cette équation, qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{d-x}{v}+\frac{x}{v'}=h,$$

étant identique avec l'équation (2), donnera la même valeur de

x, en supposant tacitement $x-d$ positif, ou $x>d$. Par conséquent, l'équation (2) suffit pour déterminer le point de rencontre lorsqu'il doit être dans la portion BM. Mais la valeur de x donnée par cette équation (2) étant égale, avec un signe contraire, à la valeur déduite de l'équation (1), il en résulte que l'équation (1) suffira pour déterminer dans tous les cas la distance du point B au point de rencontre, si l'on convient de prendre sur BN les valeurs positives de x, et sur BM ses valeurs négatives.

Cet exemple nous ramène donc à l'idée précise que nous nous sommes formée des quantités négatives, d'après les considérations exposées plus haut (15). L'on pourrait y parvenir de même dans une foule de questions où la valeur de l'inconnue x devient, selon les circonstances, positive ou négative. Car alors si l'on veut que la formule, qui donne pour x des valeurs positives prises dans un certain sens, s'applique également aux cas où ces valeurs deviennent négatives, il faut nécessairement admettre que les quantités exprimées par ces dernières valeurs doivent être prises dans un sens opposé au premier.

Ainsi les quantités négatives peuvent servir à renfermer dans une seule formule, et par conséquent dans la seule équation d'où on la tire, plusieurs cas d'une même question, dont chacun paraîtrait d'abord exiger une solution distincte. C'est pourquoi ces quantités sont d'un fréquent usage dans toutes les branches des mathématiques.

Mais les ressources de l'analyse vont encore au delà, et nous allons faire voir que la même formule, tirée de l'équation (1), non-seulement détermine la position du point de rencontre dans les trois cas où elle doit avoir lieu, mais indique aussi dans quelles circonstances les courriers ne se rencontreront plus, ou bien encore seront toujours ensemble.

Nous allons discuter ces deux nouveaux cas.

IVe CAS. — Supposons qu'on ait $v=v'$, et en même temps $d>vh$ ou $d<vh$, alors la valeur de x devient $x=\frac{v'(d-vh)}{0}$ ou infinie, ce qui apprend que les deux courriers ne pourront

jamais se rencontrer. Cette impossibilité se déduit immédiatement de l'énoncé de la question, en y faisant les mêmes suppositions; car alors, comme $v = v'$, les deux courriers ont la même vitesse, et comme en outre d diffère de vh, lorsque le premier se trouve au point B, le second est en deçà ou au delà de ce point, selon qu'on a $d > vh$ ou $d < vh$; par conséquent les courriers ont toujours dû et devront toujours conserver entre eux la même distance.

V^e^ cas. — Supposons enfin que l'on ait en même temps $v = v'$ et $d = vh$, la valeur de x sera $x = \frac{0}{0}$, c'est-à-dire indéterminée, ce qui montre que les deux courriers sont toujours ensemble. Il doit en effet en être ainsi; car de $d = vh$ il résulte que les courriers sont en même temps au point B; donc puisqu'ils ont la même vitesse, ils ont toujours dû et doivent toujours être ensemble.

82. *Remarque.* L'énoncé du problème IV peut recevoir diverses modifications, et se trouver néanmoins résolu par la même formule déduite de l'équation (1). Ainsi, par exemple on peut supposer que le second courrier, au lieu d'atteindre le point B un nombre h d'heures après l'arrivée du premier courrier en A, y devance au contraire de h heures son arrivée en A; alors il suffit de changer h en $-h$ dans la valeur de x.

De même si les courriers, au lieu d'aller dans le même sens vont à la rencontre l'un de l'autre, il suffira de changer le signe de la vitesse du courrier qui change de direction, c'est-à-dire de remplacer, dans la valeur de x, v par $-v$, ou v' par $-v'$, selon que ce sera le premier ou le second courrier qui, au lieu d'aller vers N, ira vers M. On peut également supposer que les deux courriers changent à la fois de direction, qu'ils partent en même temps de deux points donnés, etc.

Les commençants feront bien de discuter les formules résultant de ces divers énoncés, qui n'offrent d'ailleurs aucune difficulté.

83. Problème v. *Trouver un nombre tel que son quart*

minué de 20 *et ses cinq douzièmes égalent les deux tiers du même nombre diminués de* 5 ?

Soit x le nombre cherché. On aura, d'après l'énoncé, l'équation suivante :

$$\frac{x}{4}-20+\frac{5x}{12}=\frac{2x}{3}-5,$$

et successivement

$$\frac{x}{4}+\frac{5x}{12}-\frac{2x}{3}=20-5,$$

$$3x+5x-8x=(20-5)\,12,$$

$$0=15\,.\,12.$$

Ce résultat montre que la question est absurde, et n'est pas susceptible de solution (71).

On peut d'ailleurs reconnaître cette impossibilité sur l'équation primitive qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{x}{4}+\frac{5x}{12}-20=\frac{2x}{3}-5, \quad \text{ou} \quad \frac{2x}{3}-20=\frac{2x}{3}-5;$$

ainsi les deux membres différeront toujours, quelle que soit la valeur qu'on donne à x.

Problème vi. *Un percepteur négligent, recevant l'ordre d'envoyer le total de ses recettes par le retour du courrier et ne pouvant l'établir dans un temps aussi court, imagina, pour se tirer d'embarras, de répondre à son supérieur : A la moitié du total augmenté de 6 fr. ajoutez les trois quarts du total diminué de 6 fr., et de cette somme retranchez le quart de la recette augmentée de 6 fr., vous aurez le total de ma recette. On demande à combien se montait le total ?*

Soit x le montant de la recette : l'énoncé donne l'équation

$$\frac{x+6}{2}+\frac{3(x-2)}{4}-\frac{(x+6)}{4}=x;$$

d'où l'on tire successivement

$$2\,(x+6)+3\,(x-2)-(x+6)=4x,$$

$$2x+2.6+3x-2.3-x-6=4x,$$

$$2x+3x-x-4x=6+6-12,$$

$$0=0.$$

Ainsi le problème est tout à fait indéterminé, car les deux membres sont identiques sans qu'on attribue aucune valeur particulière à x.

Si l'on simplifie l'équation primitive en conservant x dans le second membre, on trouve $4x=4x$, ou $x=x$.

SECTION II.

RÉSOLUTION DE PLUSIEURS ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ EN NOMBRE ÉGAL AUX INCONNUES.

---

§ 1er. *Résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues. Méthodes d'élimination.*

84. Résoudre deux équations du premier degré contenant deux inconnues, c'est déterminer les valeurs des deux inconnues, de manière à satisfaire en même temps à ces deux équations (62). On y parvient en déduisant des deux équations, par certains procédés, une nouvelle équation ne contenant plus qu'une seule inconnue, et servant ainsi à déterminer sa valeur, d'où résulte, par substitution, la valeur de l'autre inconnue. Tout procédé, qui peut conduire à une telle équation ne contenant plus qu'une inconnue, c'est-à-dire dont l'autre inconnue a été chassée ou éliminée, s'appelle *élimination;* et, en général, on donne le même nom à tout procédé qui fait déduire, de plusieurs équations entre pareil nombre d'inconnues, une équation ne renfermant plus qu'une seule des inconnues avec des quantités connues.

Quelle que soit la forme des deux équations données entre deux inconnues x et y, on pourra toujours, 1° faire disparaître les dénominateurs comme on l'a indiqué plus haut (64); 2° transposer dans le premier membre tous les termes contenant x et y, et les termes tout connus dans le second membre; 3° réduire à un seul terme la somme algébrique des termes en x, à un seul terme celle des termes en y, et enfin à un seul

terme celle des termes tout connus, de sorte que la forme générale de deux équations à deux inconnues est

$$ax + by = c,\ a'x + b'y = c'.$$

On distingue trois procédés ou méthodes d'élimination, que nous allons exposer, pour plus de facilité, sur les deux équations suivantes,

$$(1) \qquad 4y + 3x = 24,\ 5y - 2x = 7 \qquad (2)$$

85. Ire *méthode d'élimination*, dite *par substitution.*

Admettons d'abord qu'il y ait réellement une valeur de x et une valeur de y qui satisfassent aux deux équations proposées, et que ces valeurs, étant substituées dans les deux équations, y soient représentées par x et y. Alors les deux équations pourront être considérées comme deux égalités. Or l'équation (1) donne $y = \frac{24 - 3x}{4}$ (3); par conséquent, si dans l'équation (2) nous substituons à y cette valeur exprimée en fonction de celle de x, nous obtiendrons une équation à laquelle la valeur de x, qui satisfait aux deux proposées, devra satisfaire également. Si donc on détermine, d'après la règle donnée plus haut (68), la valeur de x satisfaisant à cette dernière équation, qui d'ailleurs ne contient plus que x, tout en restant du premier degré, on sera certain d'avoir la véritable valeur de x, qui, avec la valeur correspondante de y, satisfait aux deux proposées; substituant donc dans l'équation (2) la valeur de y en fonction de x, il vient

$$5.\frac{24 - 3x}{4} - 2x = 7, \qquad (4)$$

d'où l'on tire successivement

$$5.24 - 5.3x - 4.2x = 7.4,$$
$$15x + 8x = 120 - 28,$$
$$23x = 92,$$
$$x = 4.$$

Substituant cette valeur de x dans l'équation (3), on trouve

$$y = 3.$$

Ces valeurs $x = 4$, $y = 3$, vérifient l'hypothèse qui a servi

à les obtenir, savoir qu'il y a réellement des valeurs de x et de y satisfaisant aux deux proposées. D'abord elles satisfont à l'équation (3), d'où l'on a tiré $y=3$ au moyen de $x=4$. Mais l'équation (3) redevient identique avec l'équation (1), par l'opération inverse de celle qui a servi à l'en déduire. Donc les valeurs $x=4$, $y=3$, satisfont à l'équation (1). De plus, si l'on fait $x=4$ dans l'équation (4), qui a donné cette valeur en x et se trouve alors satisfaite, l'expression $\frac{24-3x}{4}$, qui multiplie 5, n'étant autre chose que la valeur de y en x fournie par l'équation (3), deviendra égale à 3. On obtiendra donc exactement le même résultat, si l'on fait $x=4$ dans l'équation (4), ou bien $x=4$, $y=3$, dans l'équation (2), qui est donc également satisfaite par ces deux valeurs de x et de y.

Vérification. Faisant $x=4$ et $y=3$ dans les équations proposées, on a, pour la première, $4.3+3.4=24$ ou $12+12=24$, et, pour la seconde, $5.3-2.4=7$ ou $15-8=7$.

86. IIe *méthode d'élimination*, dite *par égalité* (*) ou *par comparaison.*

Soient toujours les équations

$$(1)\quad 4y+3x=24,\; 5y-2x=7\quad (2).$$

Supposons qu'on ait substitué à x et à y les valeurs qui satisfont à ces équations, les premiers membres seront respectivement égaux aux seconds. Mais si l'on ne substitue que la valeur de x, les deux équations, qui ne seront plus qu'en y devront être satisfaites par la même valeur de y, puisque cette valeur de y jointe à celle de x forme la solution. Si donc on connaissait la valeur de x, la substitution ferait acquérir aux deux équations proposées une valeur commune en y ; et ré

(*) Cette méthode d'élimination, qui consiste à égaler les valeurs d'une même inconnue tirée de deux équations, serait bien désignée par un mot qui signifierait l'action d'égaler, comme serait *égalation* qui n'existe pas. Le mot *égalisation*, qui signifie l'action de rendre égal, a un autre sens. Le mot *par comparaison* n'est point parfaitement convenable.

ciproquement si l'on détermine x de manière que ces équations acquièrent une valeur commune en y, cette valeur de x satisfera aux deux équations. Or, en égalant les valeurs de y tirées des deux équations, on obtiendra une équation en x devant fournir pour x une valeur telle que les deux équations proposées aient une valeur commune en y; et substituant cette valeur de x dans l'une des deux équations, on en tirera une valeur de y, qui, avec celle de x, formera la solution des équations proposées.

Maintenant nos deux équations donnent

$$(3) \qquad y=\frac{24-3x}{4}, \quad y=\frac{7+2x}{5}, \qquad (4)$$

et par conséquent
$$\frac{24-3x}{4}=\frac{7+2x}{5}. \qquad (5)$$

Alors la règle déjà citée donne successivement

$$120-15x=28+8x,$$
$$23x=92,$$
$$x=4.$$

On obtiendra la valeur de y en faisant $x=4$ dans l'une ou dans l'autre des équations (3), (4), qui ne sont autre chose que deux expressions différentes de la valeur de y en fonction de x, et dont l'égalité a précisément procuré l'équation d'où l'on a tiré $x=4$. Il résulte encore de là que la valeur de y, donnée par l'une ou par l'autre, sera la même.

Faisant $x=4$ dans l'équation (3), il vient

$$y=\frac{24-3.4}{4}=3.$$

Il suit de ce qui précède que les valeurs $x=4$, $y=3$, ainsi déterminées, satisfont aux équations (3) et (4), et aux deux proposées. D'ailleurs, il doit évidemment en être ainsi, puisqu'on a déduit immédiatement, par une simple transposition de terme et par une division, les équations (3) et (4) des deux équations proposées, avec lesquelles on les rendrait identiques par les opérations inverses.

87. IIIe *méthode d'élimination*, dite *par addition et soustraction*, ou *par réduction*.

Pour faire voir comment on a été conduit à cette troisième méthode, plus commode que les deux autres, surtout quand les inconnues doivent être fractionnaires, supposons d'abord que les deux équations, toujours réduites chacune à trois termes (84), aient le même coefficient pour l'une des inconnues, x, par exemple; alors on pourra faire disparaître ou éliminer cette inconnue, en ajoutant ou retranchant ces deux équations membre à membre, selon que les coefficients de x seront de signes contraires ou de même signe. Car le résultat, étant une équation seulement en y, en donnera la valeur.

Soient les deux équations

$$5x-4y=9,\ 5x+6y=49.$$

Retranchant, membre à membre, la seconde équation de la première, on trouve l'équation

$$6y+4y=49-9,\text{ qui donne } 10y=40,\text{ d'où } y=4.$$

Puis, en faisant $y=4$ dans l'une des équations proposées, la première, par exemple, on a

$$5x-4.4=9,\text{ d'où } 5x=25,\text{ et } x=5.$$

Lorsque aucune des inconnues n'a le même coefficient dans les deux équations, il est facile de remplacer celles-ci par deux autres équivalentes et satisfaisant à cette condition ; car il suffit pour cela de multiplier les deux membres de chaque équation par le coefficient dont se trouve affectée, dans l'autre équation, l'inconnue qu'on veut éliminer. Cette opération, offrant la plus grande analogie avec la réduction des fractions au même dénominateur, peut également se simplifier; ainsi lorsque les coefficients de l'inconnue à éliminer ne sont pas premiers entre eux, on les décompose en facteurs premiers, et l'on ne multiplie chaque équation que par le produit des facteurs du coefficient correspondant de l'autre équation, qui ne se trouvent pas dans le sien.

Reprenons les équations (1), $4y+3x=24$, $5y-2x=7$, (2

Pour éliminer x on multiplie les deux membres de l'équation (1) par 2, et ceux de l'équation (2) par 3, ce qui donne

$$8y + 6x = 48,\quad 15y - 6x = 21,$$

ajoutant ces équations membre à membre, il vient

$$23y = 69,\text{ d'où } y = 3.$$

Faisant $y = 3$ dans l'une des équations proposées, la première, par exemple, on a $24 + 6x = 48$, ou $6x = 24$, d'où $x = 4$.

On peut également déterminer x en multipliant les deux membres de l'équation (1) par 5, et ceux de l'équation (2) par 4, ce qui donne

$$20y + 15x = 120,\quad 20y - 8x = 28;$$

alors, en retranchant, membre à membre, la seconde équation de la première, on a

$$23x = 92,\text{ d'où } x = 4.$$

Il est inutile de multiplier l'un par l'autre les coefficients de l'inconnue que l'on veut éliminer, puisqu'on sait d'avance que ces produits seront les mêmes, et que les termes où ils se trouvent s'évanouiront dans le résultat.

Il reste à prouver, comme dans les deux autres méthodes d'élimination, que les valeurs de x et de y, trouvées par celle-ci, doivent satisfaire aux deux équations proposées. Soient, en général, $A = B$, $A' = B'$, deux équations en x et y, et qui ont respectivement m et n pour coefficients de l'inconnue y, par exemple, qu'on veut éliminer. On multiplie les deux membres de la première par n, et ceux de la seconde par m, ce qui donne

$$An = Bn,\quad A'm = B'm;$$

les ajoutant ou les retranchant membre à membre, il vient

$$An \pm A'n = Bm \pm B'm,$$

qui ne contient plus que x. Or, soient $x = a$, $y = b$, les valeurs de x et de y qui satisfont aux deux équations proposées, et supposons qu'on y ait effectué cette substitution, elles deviendront alors des égalités. Mais il en sera évidemment de

6.

même pour les deux équations qu'on déduit des premières en les multipliant par m et par n, et, par conséquent, pour l'équation

$$An \pm A'n = Bm \pm B'm,$$

qui ne contient plus y, et donnera nécessairement $x=a$. D'ailleurs, si de la dernière équation on retranche le produit de la première par n, et qu'on divise les deux membres par $\pm m$, on retrouve $A'=B'$. D'où il résulte que les valeurs $x=a$, $y=b$, qui satisfont au système des deux proposées, satisfont également au système formé de l'une d'elles, $A=B$, avec l'équation

$$An \pm A'n = Bm \pm B'm,$$

et réciproquement. Par conséquent, si l'on substitue la valeur $x=a$, donnée par cette dernière, dans $A=B$, elle donnera pour y la valeur $y=b$.

En outre, il est clair qu'il y a seulement une solution $x=a$, $y=b$, qui puisse convenir aux équations proposées; car, quelle que soit la méthode d'élimination qu'on emploie, leur solution dépend toujours d'une équation du premier degré à une inconnue qui n'est susceptible que d'une seule valeur (69).

88. Soient les équations

$$24x - 44y = 48,$$
$$18x + 12y = 144.$$

Remarquons d'abord que le facteur 4 étant commun à tous les termes de la première, et le facteur 6 à tous ceux de la seconde, il faut avant tout les faire disparaître pour simplifier les calculs, ce qu'on ne doit jamais négliger.

Ces équations deviennent alors

$$6x - 11y = 12,$$
$$3x + 2y = 24.$$

Maintenant, comme le coefficient 6 égale 2.3, on rendra les coefficients de x égaux, en multipliant la seconde équation par 2. Retranchant ensuite la première de la seconde, on a

$$4y + 11y = 48 - 12, \text{ d'où } y = 2 + \frac{2}{5}, \text{ et par suite } x = 7 - \frac{3}{5}$$

89. Soient encore les deux équations

$$\frac{4x}{3}+\frac{8y}{5}=64,\quad \frac{5x}{3}+\frac{9y}{5}=77.$$

En faisant évanouir les dénominateurs, elles deviennent

$$5.4x+3.8y=3.5.64,\ 5.5x+3.9y=3.5.77;$$

multipliant la première par 5, la seconde par 4, et prenant leur différence, il vient successivement

$$5.3.8y-4.3.9y=5.3.5.64-4.3.5.77,$$
$$5.2y-9y=5.5.16-5.77,$$
$$y=15.$$

et par suite $x=30$.

§ 2. *Résolution d'un nombre quelconque d'équations particulières du premier degré, renfermant un pareil nombre d'inconnues.*

90. Soient d'abord les trois équations

$$5x+3y+2z=42,$$
$$3x+6y-3z=21,$$
$$8x-2y-2z=2.$$

En employant l'une des trois méthodes exposées ci-dessus, on pourra éliminer l'inconnue z entre la première équation et chacune des deux autres; on aura ainsi deux équations, qui, ne renfermant plus que x et y, serviront à déterminer leurs valeurs. Les substituant alors dans l'une des trois équations proposées, on obtiendra la valeur de z.

Le coefficient de z étant le même dans la première et dans la troisième, il vaut mieux, surtout ici, choisir la méthode d'élimination par réduction, qui donne

$$21x+21y=168,\ 13x+y=44.$$

Éliminant de même y entre ces deux équations, il vient

$$252x=756,\ \text{d'où}\ x=3.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, il vient

$$39+y=44,\ \text{d'où}\ y=5.$$

Enfin, faisant $x=3$, $y=5$ dans la première équation, on a

$$15+15+2z=42, \text{ d'où } z=6.$$

Ainsi les trois inconnues ont pour valeurs

$$x=3, y=5, z=6.$$

Résolvons maintenant les mêmes équations par la première méthode d'élimination, qui consiste à tirer de chacune des équations la valeur de l'une des inconnues z, par exemple, comme si x et y étaient des quantités connues, et à les égaler entre elles deux à deux; on aura

$$z=\frac{42-5x-3y}{2},$$

$$z=\frac{3x+6y-21}{3},$$

$$z=\frac{8x-2y-2}{2}.$$

Égalant la première valeur de z à chacune des autres, il vient

$$\frac{42-5x-3y}{2}=\frac{3x+6y-21}{3}, \frac{42-5x-3y}{2}=\frac{8x-2y-2}{2},$$

ou, en réduisant,

$$21x+21y=168, 13x+y=44.$$

Ces équations, étant précisément les mêmes que nous ve-nons d'obtenir par la première méthode, donnent pareill-ment $x=3$, $y=5$, et par suite $z=6$.

Ces valeurs de x, y et z satisferont aux équations proposée et seront les seules qui rempliront cette condition. Car supp-sons qu'en général les valeurs $x=a$, $z=b$, $y=c$ satisfasse réellement aux équations proposées, et qu'on effectue la subs-tution, elles rendront les premiers membres égaux aux second Mais si l'on ne substitue que les valeurs de x et de y, les tr proposées acquerront une valeur commune en z, puisqu'el devront alors être toutes satisfaites par la substitution de $z=$ Donc si l'on prend les valeurs de z dans chaque équation qu'on les égale deux à deux, on aura deux équations à de inconnues x et y, et les valeurs de x et de y qui satisferont à

deux équations auront la propriété de faire acquérir aux trois proposées une valeur commune en z. Ces valeurs de x et de y, jointes à la valeur commune en z, formeront la solution des trois équations proposées. Il est clair d'ailleurs qu'elles ne peuvent avoir qu'une solution, les deux équations en x et y n'en admettant qu'une seule (87).

D'ailleurs, quelle que soit la méthode qu'on emploie, les deux équations en x et y, qu'on déduit des trois proposées, donnent les valeurs de x et de y, qui servent avec la première des proposées, par exemple, à déterminer celle de z, et il est clair que ces trois valeurs de x, de y et de z doivent satisfaire à la première des trois proposées et aux deux en x et y; mais ces deux dernières étant des conséquences des trois proposées, et réciproquement les deuxième et troisième des proposées étant des conséquences de la première et des deux en x et y convenablement combinées, il en résulte que les valeurs de x, de y et de z, qui satisfont au système de ces trois dernières équations, satisferont également à la deuxième et à la troisième des équations proposées, et par conséquent au système des trois équations.

91. Il est facile d'appliquer ces considérations à un nombre quelconque d'équations renfermant un pareil nombre d'inconnues, ce qui permet de prescrire la règle suivante :

Règle générale. *Pour résoudre plusieurs équations du premier degré contenant un pareil nombre d'inconnues, il faut éliminer une inconnue entre l'une de ces équations et chacune des autres, ce qui donnera de nouvelles équations du premier degré en nombre moindre d'une unité que les proposées et contenant une inconnue de moins. Opérant sur ces nouvelles équations comme sur les équations proposées, on éliminera encore une inconnue entre l'une de ces nouvelles équations et chacune des autres, ce qui donnera encore de nouvelles équations du premier degré en nombre moindre de deux unités que les proposées et contenant deux inconnues de moins. En continuant de même, on arrivera nécessairement à une équation du premier degré ne contenant qu'une inconnue, et servant ainsi à la déterminer. Substituant sa valeur dans l'une des équations précédentes qui ne contienne que cette inconnue et une autre seule-*

ment, on en déduira la valeur de cette dernière. Puis, remontant de proche en proche jusqu'à l'une des équations primitives, on déterminera successivement la valeur des autres inconnues.

D'après cela, ayant m équations entre m inconnues, la première élimination donnera $m-1$ nouvelles équations entre $m-1$ inconnues. La deuxième élimination donnera $m-2$ nouvelles équations entre $m-2$ inconnues, ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne une équation à une inconnue, d'où l'on déduira sa valeur et par suite celle des autres inconnues. Chaque inconnue étant ainsi déterminée par une équation du premier degré à une inconnue, il ne peut y avoir qu'un seul système de valeurs qui satisfasse aux équations proposées. Dans tous les cas, il ne faut pas oublier de ramener les équations à la forme la plus simple dont elles soient susceptibles, en faisant d'abord disparaître les dénominateurs, et réduisant les termes contenant la même inconnue, ainsi que les termes tout connus.

Les équations simplifiées devront chacune alors contenir seulement autant de termes plus un qu'elles renferment d'inconnues.

92. Lorsque toutes les inconnues n'entrent pas dans chacune des équations, celles-ci sont néanmoins toujours comprises dans la forme générale que nous venons d'indiquer, puisqu'il suffit d'égaler à zéro un ou plusieurs coefficients des inconnues dans les équations générales pour en déduire la forme particulière de celles dont on s'occupe. Ainsi les méthodes d'élimination restent exactement les mêmes, mais leur application devient plus simple, parce qu'on a moins d'opérations à effectuer.

Soient, par exemple, les équations suivantes entre les quatre inconnues x, y, z, u :

$$4x-3y+2u=9,$$
$$2x+6z=28,$$
$$4u-2y=14,$$
$$3x+4u=26.$$

En examinant ces équations, on voit que si l'on élimine u

entre la première et la troisième, puis entre la troisième et la quatrième, on aura deux équations entre x et y qui serviront à déterminer ces inconnues. L'élimination donne

$$8x - 4y = 4,\ 3x + 2y = 12.$$

Éliminant x, il vient

$$16y + 12y = 96 - 12,\ \text{d'où}\ y = 3.$$

Faisant $y = 3$ dans la dernière en x et y, et dans la troisième des proposées, on a

$$3x + 6 = 12,\ \text{d'où}\ x = 2,\ \text{et}\ 4u - 6 = 14,\ \text{d'où}\ u = 5\,;$$

faisant enfin $x = 2$ dans la seconde, on a $4 + 6z = 28$, qui donne $z = 4$; les valeurs demandées sont donc

$$x = 2,\ y = 3,\ z = 4,\ u = 5.$$

93. Voici un dernier exemple que nous proposons comme exercice :

$$x + \frac{y+z}{2} = a,\quad y + \frac{x+z}{3} = b,\quad z + \frac{x+y}{4} = c,$$

on doit trouver

$$x = \frac{22a - 8c - 9b}{17},\quad y = \frac{21b - 6a - 4c}{17},\quad z = \frac{20c - 3b - 4a}{17}.$$

§ 3. *Résolution des équations générales du premier degré entre autant d'inconnues, et discussion des formules.*

94. Lorsqu'on veut résoudre un nombre quelconque d'équations du premier degré, renfermant un pareil nombre d'inconnues, il y a toujours, sauf quelques cas particuliers que nous traiterons tout à l'heure, un système de valeurs qui satisfait à ces équations (91), et il n'y en a qu'un seul.

Si l'on a plus d'équations que d'inconnues, la question sera en général impossible. Par exemple, si l'on a 6 équations et seulement 3 inconnues, on prendra 3 des équations proposées qui serviront à déterminer les 3 inconnues, et substituant à ces inconnues leurs valeurs dans les 3 autres équations, en général elles ne seront pas satisfaites, à moins qu'on ne les ait

choisies exprès; alors cette substitution établira les trois relations qui doivent exister entre les coefficients de ces inconnues, pour que toutes les équations soient satisfaites à la fois. Les relations, dont nous venons de parler, s'appellent *équations de condition.*

Mais lorsqu'on a plus d'inconnues que d'équations, par exemple une équation à deux inconnues x et y, il est clair qu'on n'en pourra déduire la valeur de x que dans le cas où y serait connu, et comme rien ne détermine y, on pourra lui donner toutes les valeurs possibles. Ainsi l'équation est susceptible d'un nombre infini de solutions, et le problème, dont elle est la traduction algébrique, est indéterminé. Il en est de même si l'on a plusieurs équations et un plus grand nombre d'inconnues; la question se ramène alors en définitive à la résolution d'une équation entre plusieurs inconnues, de sorte, qu'une exceptée, on peut arbitrairement disposer de toutes celles-ci. Il vaut mieux, dans ce cas, choisir autant d'inconnues qu'il y a d'équations, et opérer comme si les autres étaient des quantités connues; leur donnant ensuite des valeurs particulières, on obtiendra, pour les premières inconnues, autant de systèmes de valeurs, qu'on en aura choisi pour les dernières.

95. Nous allons établir dans cette section les formules générales relatives à la résolution d'un nombre quelconque d'équations du premier degré contenant un pareil nombre d'inconnues, et nous en ferons ensuite l'application aux différents cas particuliers qui peuvent se présenter. On pourrait résoudre ces équations par l'une des trois méthodes d'élimination exposées plus haut; mais nous adopterons une autre méthode, dite des *indéterminées,* due à Bezout, parce qu'elle est généralement employée, et qu'elle offre l'avantage d'éliminer à la fois toutes les inconnues, hors une. Toutefois, cette méthode est moins simple que celle par réduction, lorsqu'il n'y a que deux équations.

96. Prenons d'abord les deux équations générales du premier degré entre deux inconnues

$$ax + by = c,\ a'x + b'y = c',$$

où a, b, c, a', b', c' représentent des quantités connues positives ou négatives, qu'on peut même supposer entières (84); mais c'est indifférent pour l'établissement des formules. On évite une trop grande confusion de lettres et l'on soulage beaucoup l'attention en prenant les mêmes lettres pour représenter les quantités analogues dans diverses équations, ayant soin de les distinguer par un ou plusieurs accents, selon le nombre des équations.

Multiplions la première équation par une quantité m, et retranchons-en la seconde, membre à membre, il viendra l'équation suivante :

$$(am - a')\,x + (bm - b')\,y = cm - c',$$

d'où l'on déduira les valeurs de x et de y en choisissant l'indéterminée m, de manière à rendre nul le coefficient de l'inconnue qu'on veut éliminer. Ainsi, pour trouver x, on fait disparaître y en posant $bm - b' = 0$, d'où $m = \frac{b'}{b}$. Substituant à m cette valeur dans l'équation $(am - a')\,x = cm - c'$, il vient

$$\left(a\frac{b'}{b} - a'\right)x = c\frac{b'}{b} - c', \quad \text{d'où l'on tire} \quad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

De même, pour trouver y, on fera disparaître x en posant

$$am - a' = 0, \quad \text{d'où} \quad m = \frac{a'}{a};$$

la substitution donne

$$\left(b\frac{a'}{a} - b'\right)y = c\frac{a'}{a} - c', \quad \text{d'où} \quad y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'};$$

changeant le signe des deux termes de cette fraction, pour que le dénominateur soit le même dans les valeurs de x et de y, on aura

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

L'inspection de ces valeurs montre qu'on peut déduire l'une de l'autre en changeant a en b et réciproquement, sans déplacer les accents. Il résulte en effet de la forme des équa-

tions générales, qu'en opérant comme ci-dessus, après avoir fait le même changement de lettres, on trouverait y au lieu de x, et ensuite x au lieu de y. Il suffit donc d'avoir la valeur d'une inconnue pour en déduire immédiatement la valeur de l'autre inconnue.

97. Il est bon, surtout lorsqu'on a un plus grand nombre d'équations, de vérifier les valeurs des inconnues en les substituant dans les équations primitives, ce que nous engageons à faire, une fois pour toutes. Dans ce cas, on trouvera les identités

$$c = c, \; c' = c'.$$

Si maintenant on veut appliquer les formules ci-dessus à la résolution de deux équations numériques, qu'on réduit d'abord à trois termes, comme $6x - 8y = 12$, $3x + 2y = 24$, on y fait $a = 6$, $b = -8$, $c = 12$, $a' = 3$, $b' = 2$, $c' = 24$, ce qui donne, après la réduction, $x = 6$, $y = 3$.

98. Soient maintenant les trois équations générales entre trois inconnues

$$ax + by + cz = d,$$
$$a'x + b'y + c'z = d',$$
$$a''x + b''y + c''z = d''.$$

Multiplions la première par une indéterminée m, la seconde par une autre indéterminée n, et de la somme faite, membre à membre, retranchons de même la troisième, il viendra l'équation

$$(am + a'n - a'')x + (bm + b'n - b'')y + (cm + c'n - c'')z$$
$$= dm + d'n - d'',$$

qui donnera la valeur de chacune des inconnues x, y, z, en disposant des indéterminées m et n de manière à faire disparaître les coefficients des deux autres inconnues.

Si l'on veut obtenir la valeur de x, on fera

$$bm + b'n - b'' = 0, \; cm + c'n - c'' = 0,$$

et l'on aura
$$x = \frac{dm + d'm - d''}{am + a'n - a''}.$$

Les valeurs des indéterminées m et n, qui dépendent des équations $bm + b'n = b''$, $cm + c'n = c''$, seront données par les

formules relatives aux équations entre deux inconnues x et y (96), en y remplaçant respectivement les lettres

$$x,\ y,\ a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c',$$

par les lettres $m,\ n,\ b,\ b',\ b'',\ c,\ c',\ c''$,

ainsi l'on aura $m=\dfrac{c'b''-b'c''}{bc'-cb'},\quad n=\dfrac{bc''-cb''}{bc'-cb'};$

et en substituant à m et à n ces valeurs dans celle de x, il viendra

$$x=\frac{d(c'b''-b'c'')+d'(bc''-cb'')-d''(bc'-cb')}{a(c'b''-b'c'')+a'(bc''-cb'')-a''(bc'-cb')}.$$

Pour avoir la valeur de y, on posera

$$am+a'n-a''=0,\quad cm+c'n-c''=0,$$

ou $\quad am+a'n=a'',\quad cm+c'n=c'',$

et l'on aura, comme tout à l'heure,

$$m=\frac{c'a''-a'c''}{ac'-ca'},\quad n=\frac{ac''-ca''}{ac'-ca'}.$$

La substitution de ces valeurs dans celle de y donnera

$$y=\frac{d(c'a''-a'c'')+d'(ac''-ca'')-d''(ac'-ca')}{b(c'a''-a'c'')+b'(ac''-cb'')-b''(ac'-ca')}.$$

Enfin, pour avoir la valeur de z, on posera

$$am+a'n=a''\quad bm+b'n=b'',$$

d'où $\quad m=\dfrac{b'a''-ab''}{ab'-ba'},\quad n=\dfrac{ab''-ba''}{ab'-ba'},$

et la substitution donnera

$$z=\frac{d(b'a''-a'b'')+d'(ab''-ba'')-d''(ab'-ba')}{c(b'a''-a'b'')+c'(ab''-ba'')-c''(ab'-ba')}.$$

Si maintenant l'on effectue dans les valeurs de x, de y, et de z, les multiplications indiquées, et que, pour mettre les formules en harmonie, on change les signes du numérateur et du dénominateur dans la valeur de x et dans celle de z, on aura

$$x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+c'ab''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$$

$$y=\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$$

$$z=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

99. On peut voir qu'en appliquant la même méthode à 4, 5, et en général à m équations, contenant le même nombre d'inconnues, on devra les multiplier toutes, moins une, par une indéterminée différente pour chacune d'elles, puis faire leur somme, membre à membre, et retrancher de même la dernière telle qu'elle est. On obtiendra ainsi une équation dont on déduira successivement la valeur de chacune des inconnues en égalant à zéro les coefficients de toutes les inconnues moins celle que l'on cherche. Ces équations fourniront les valeurs des indéterminées, qui, substituées dans l'équation à une seule inconnue, en feront connaître la valeur. On aura de même celle des autres inconnues.

100. En examinant attentivement les formules qui donnent les valeurs des inconnues dans les équations générales résolues précédemment, on s'aperçoit qu'elles sont soumises à des règles générales, qui peuvent les faire retrouver sans aucun calcul, et conduire de même aux formules relatives à un nombre quelconque d'équations.

1° Pour former le dénominateur commun des valeurs de x et de y de deux équations (96), il faut écrire les deux arrangements ab et ba des deux lettres a et b, donner le signe — au second arrangement ba, et accentuer la seconde lettre de chaque arrangement, ce qui donne $ab' - ba'$.

Pour former le dénominateur commun des valeurs de x, de y et de z de trois équations, il faut d'abord, comme pour deux équations, prendre les deux arrangements ab, ba, en affectant le second du signe —, ce qui donne $ab - ba$, puis écrire successivement la troisième lettre c à toutes les places dans chaque terme de $ab - ba$, en commençant par la mettre à la troisième place, et en faisant alterner les signes + et —, ce qui donnera l'expression

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba,$$

dont la première moitié provient du premier terme ab, et la seconde moitié du second terme ba; enfin mettre dans chaque terme un accent à la seconde lettre, et deux accents à la troisième, de sorte qu'on aura

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''.$$

De même pour quatre équations, on prendra l'expression non accentuée trouvée pour trois équations, on écrira successivement la quatrième lettre d à toutes les places de chaque terme de cette expression, en commençant par la mettre à la quatrième place, et en faisant toujours alterner les signes, puis on mettra dans chaque terme un accent à la seconde lettre, deux à la troisième, trois à la quatrième, et alors on aura le dénominateur commun à toutes les valeurs des quatre inconnues. Ainsi de suite.

2° Pour former le numérateur de l'une quelconque des inconnues, il suffit, dans tous les cas, de remplacer dans le dénominateur commun, et sans déplacer les accents, la lettre qui représente dans les équations le coefficient de l'inconnue que l'on cherche, par le terme tout connu.

Ainsi, dans le cas de deux équations, ayant le dénominateur commun $ab' - ba'$, on obtiendra le numérateur de x, en y remplaçant son coefficient a par le terme c tout connu, sans déplacer les accents, ce qui donne en effet $cb' - bc'$; de même pour le numérateur de y.

La même règle se vérifie également pour trois, quatre, etc., équations (*).

101. Nous avons dit (91 et 94) qu'étant donné un nombre quelconque d'équations du premier degré entre pareil nombre d'inconnues, il existe toujours, sauf quelques cas particuliers, un système de valeurs satisfaisant à ces équations, et nous venons de donner les formules générales, qui, servant à les déterminer, doivent par conséquent faire connaître les cas d'exception.

Reprenons les deux équations générales

$$(1) \qquad ax + by = c,$$
$$(2) \qquad a'x + b'y = c',$$

et les formules relatives

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

(*) Laplace a démontré ces règles, d'une manière générale, dans les *Mémoires de l'Académie des sciences pour l'année* 1772.

1° Si les valeurs des deux inconnues sont positives, le problème, dont les équations données sont la traduction algébrique, est possible dans le sens de son énoncé, sauf les conditions qui ont pu être négligées ou supposées tacitement pour la mise en équation (69). Si une valeur ou toutes deux sont négatives, pour avoir une solution positive il faut dans l'équation changer les signes des termes qui contiennent les inconnues à valeur négative, et modifier, si c'est possible, l'énoncé du problème (69).

2° Si le dénominateur commun est nul, sans qu'aucun des numérateurs le soit, on aura $ab'-ba'=0$, et par suite

$$x=\frac{cb'-bc'}{0},\quad y=\frac{ac'-ca'}{0}.$$

Ainsi ces valeurs sont infinies, et ne peuvent satisfaire aux équations proposées, sans être plus grandes que toute quantité donnée. D'où il résulte que les équations sont incompatibles ou contradictoires, et que par conséquent la question, dont elles sont la traduction algébrique, est absurde, sauf peut-être le cas de constructions géométriques (71).

En effet, de la relation $ab'-ba'=0$, on tire $a'=\frac{ab'}{b}$; substituant cette valeur de a' dans l'équation (2), il vient

$$\frac{ab'}{b}x+b'y=c',\quad \text{d'où}\quad ax+by=\frac{bc'}{b'};$$

le premier membre de cette équation étant identique avec celui de l'équation (1), il doit en être de même pour les seconds; donc $c=\frac{bc'}{b'}$, d'où $cb'-bc'=0$, ce qui est contre la supposition, aucun des deux numérateurs n'étant nul.

Si le dénominateur étant nul, l'un des numérateurs n'est pas nul, l'autre ne le sera pas non plus. Car si l'on avait $cb'-bc'=0$, ou $cb'=bc'$, en divisant, membre à membre, cette égalité par $ab'=ba'$ on aurait $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$ ou $ac'-ca'=0$, ce qui est contre l'hypothèse. Donc si l'une des valeurs est infinie, l'autre le sera pareillement.

3° Si le dénominateur commun $ab'-ba'$ et l'un des numérateurs $cb'-bc'$ sont nuls, l'autre numérateur sera également nul; car de $ab'-ba'=0$ et $cb'-bc'=0$, on tire

$$a'=\frac{ab'}{b},\quad c'=\frac{cb'}{b};$$

substituant ces valeurs dans le second numérateur $ac'-ao'$, il vient

$$a\frac{cb'}{b}-c\frac{ab'}{b} \text{ ou zéro.}$$

Ainsi l'on a $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$, c'est-à-dire que x et y sont indéterminées.

Pour vérifier qu'il en est réellement ainsi, substituons dans l'équation (2) les valeurs précédentes de a' et de c'; il vient alors

$$\frac{ab'}{b}x+b'y=\frac{cb'}{b},\quad \text{d'où}\quad (ax+by)\frac{b'}{b}=c.\frac{b'}{b},$$

qui n'est autre chose que l'équation (1) dont on a multiplié les deux membres par $\frac{b'}{b}$; donc toutes les valeurs de x et de y, qui satisfont à l'une, doivent satisfaire à l'autre; et comme l'équation (1) admet un nombre infini de solutions, il en est de même de l'équation (2), et par conséquent du système des deux équations données.

Les valeurs de x et de y sont donc bien indéterminées, mais non absolument indépendantes l'une de l'autre, puisqu'elles sont liées par l'équation $ax+by=c$. Or, celle-ci donne $y=\frac{c-ax}{b}$, d'où l'on déduira, pour chaque valeur entièrement arbitraire de x, une valeur correspondante de y : mais ceci n'empêche pas que les équations proposées ne soient susceptibles d'une infinité de solutions, x pouvant recevoir un nombre infini de valeurs arbitraires.

La même relation $y=\frac{c-ax}{b}$ montre que si la valeur d'une inconnue est finie, infinie ou indéterminée, il en sera de même de la seconde.

102. *Remarque.* Il faut cependant distinguer le cas de certaines valeurs particulières. Car si l'on a $a=0$ et $a'=0$, il en résulte $ab'-ba'=0$ et $ac'-ca'=0$, sans qu'on puisse en conclure que l'on a $cb'-bc'=0$; et lorsque cette dernière relation n'a pas lieu, les valeurs des inconnues sont $x=\frac{cb'-bc'}{0}$, $y=\frac{0}{0}$, c'est-à-dire, l'une infinie et l'autre indéterminée. Ce serait le contraire, si l'on avait $b=0$ et $b'=0$. Dans ces deux cas, les équations proposées sont contradictoires, comme il est facile de le reconnaître *à priori*.

Enfin si, outre $a=0$ et $a'=0$, on a encore $cb'-bc'=0$, la valeur générale de x devient $\frac{0}{0}$; et en effet cette inconnue, n'entrant plus dans les équations, est bien une quantité arbitraire, mais la valeur générale de y est aussi $\frac{0}{0}$, tandis que les équations donnent, pour y, une valeur déterminée.

103. On peut discuter les formules relatives à trois équations entre trois inconnues, comme nous venons de le faire pour celles tirées de deux équations; mais les calculs devenant alors plus compliqués, nous allons seulement indiquer les principaux résultats de cette discussion.

1° Lorsque le dénominateur commun n'est pas nul, les valeurs déduites des formules satisfont toujours aux équations proposées.

2° Lorsque le dénominateur est nul, sans qu'aucun numérateur soit nul, les valeurs des inconnues sont infinies, et les équations sont contradictoires. Mais il est à remarquer que les valeurs de x et de y, par exemple, peuvent être de la forme $\frac{m}{0}$, et celle de z de la forme $\frac{0}{0}$.

3° Lorsque les valeurs des inconnues se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, elles peuvent être indéterminées, ou bien déterminées, si la forme $\frac{0}{0}$ provient de certaines suppositions qui in-

troduisent dans les deux termes un facteur commun devenant nul (76). Supprimant ce facteur commun, on obtiendra les vraies valeurs.

Lorsque les inconnues sont réellement indéterminées, en introduisant les mêmes hypothèses dans les équations générales, on verra si elles se réduisent à deux équations différentes ou seulement à une. Dans le premier cas, on pourra donner à l'une des inconnues des valeurs arbitraires, et déterminer les valeurs correspondantes des deux autres. Dans le second cas, on pourra donner à deux inconnues des valeurs arbitraires, et déterminer les valeurs correspondantes de la troisième. Enfin, les trois équations peuvent se réduire à deux équations contradictoires, ou bien être contradictoires deux à deux.

Il suit de là que si les valeurs générales se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, le seul moyen de connaître exactement les particularités qu'elles peuvent présenter, est de résoudre directement les équations qui leur ont fait donner cette forme.

§ 4. *Problèmes du premier degré à une inconnue.*

104. Les formules précédentes servent à résoudre tous les problèmes déterminés du premier degré, dès qu'on les a mis en équation. Mais il est souvent plus simple d'effectuer directement l'élimination sur ces équations, surtout lorsqu'il y en a plus de deux. C'est ce que nous allons faire pour les problèmes suivants, en recommandant toutefois aux élèves de vérifier les résultats avec ceux qui sont fournis par les formules générales.

105. PROBLÈME VII. *Un horloger ayant vendu pendant un mois* 3 *montres et* 5 *pendules, qui lui rapportent ensemble un bénéfice de* 800 *fr., se trouve avoir fait un bénéfice égal sur la vente de chaque montre, et aussi un bénéfice égal sur la vente de chaque pendule; le mois suivant il vend* 16 *montres et* 4 *pendules, et fait sur chaque montre le même bénéfice que dans le*

mois précédent; mais il perd sur chaque pendule la même somme qu'il avait gagnée sur chacune le mois précédent, de sorte que son bénéfice dans ce mois n'est que de 1200 fr. On demande si dans le premier mois il a eu plus de bénéfice pour chaque montre que pour chaque pendule?

Représentons par x le gain qu'il fait sur chaque montre, et par y le gain qu'il fait sur chaque pendule dans le premier mois, on aura $3x+5y=800$ fr. Le mois suivant il a le même bénéfice x sur chaque montre, ce qui fait $16x$; mais comme il perd sur chaque pendule la même somme y qu'il avait d'abord gagnée sur chacune, le bénéfice $16x$ qu'il fait sur les montres doit être diminué de la perte $4y$ qu'il fait sur les pendules, de sorte qu'on a $16x-4y=1200$. Ainsi, les deux équations du problème sont

$$3x+5y=800,\ 16x-4y=1200.$$

Nous allons les résoudre directement par chaque méthode d'élimination, après avoir simplifié la seconde en divisant tous les termes par 4, ce qui donne pour les deux équations du problème

$$3x+5y=800,\ 4x-y=300.$$

1° Par voie d'*égalité* ou de *comparaison*. — On a successivement

$$y=\frac{800-3x}{5},\quad y=4x-300,$$
$$\frac{800-3x}{5}=4x-300,$$
$$800-3x=20x-1500,$$
$$23x=2300,$$
$$x=100.$$

Mettant cette valeur de x dans la seconde valeur de y, on a

$$y=400-300=100.$$

Ainsi, pendant le premier mois, l'horloger a gagné 100 fr. par montre, et de même 100 fr. par pendule.

2° Par voie de *substitution*. — La seconde équation donne

$$y=4x-300.$$

Susbtituant cette valeur dans la première, on a successivement

$$3x+5(4x-300)=800,$$
$$3x+20x-1500=800,$$
$$23x=2300,$$
$$x=100, \text{ et par suite } y=100.$$

3° Par voie de *réduction.* — On élimine y en multipliant la seconde équation par 5 et l'ajoutant à la première, ce qui donne

$$20x+3x=1500+800,$$
$$23x=2300,$$

d'où
$$x=100, \text{ et de même } y=100.$$

106. PROBLÈME VIII. *Faire avec deux matières, dont on connaît les poids sous un volume donné, un corps mixte d'un poids et d'un volume donnés?*

Soient P et V le poids et le volume de l'alliage, p et p' les poids de l'unité de volume des deux matières, et nommons x et y les volumes qu'on doit en prendre. La somme de ces volumes devant égaler le volume V de l'alliage, on a d'abord $x+y=V$.

La somme des poids des deux volumes employés doit de même égaler le poids de l'alliage. Or le poids des volumes x et y se détermine en les multipliant par les poids p et p' de l'unité de volume, ce qui donne pour ces poids px, et $p'y$. On a donc

$$px+p'y=P.$$

Ainsi, les deux équations du problème sont

$$x+y=V,$$
$$px+p'y=P.$$

Éliminant successivement y et x par réduction, on trouve

$$x=\frac{P-p'V}{p-p'},\quad y=\frac{pV-P}{p-p'}.$$

Il est à remarquer que les quantités pV et $p'V$ qui entrent dans ces formules expriment ce que pèserait l'alliage dont le volume est V, s'il n'était composé que de la première matière

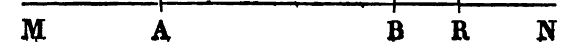
pour pV, et de la seconde pour $p'V$. Ainsi, les formules peuvent s'énoncer ainsi :

1° Pour avoir le volume de la première matière qui doit entrer dans l'alliage, il faut calculer ce que pèserait l'alliage, s'il n'était composé que de la seconde matière, retrancher ce poids du poids total de l'alliage, et diviser le reste par la différence des pesanteurs spécifiques des deux matières. Le quotient sera le premier volume cherché.

2° Pour avoir le volume de la seconde matière, il faut de même calculer ce que pèserait l'alliage, s'il n'était composé que de la première matière, mais en retrancher le poids total de l'alliage, et diviser aussi le reste par la différence des pesanteurs spécifiques.

107. *Remarque.* Ces règles servent à résoudre toutes les questions sur les alliages et les mélanges, quand on connaît le prix de chaque matière. Supposons, par exemple, que l'on demande *combien on doit mêler de vin à* 1f 20c *et de vin à* 70c *pour faire* 100 *litres de vin à* 85c? Pour trouver le nombre de litres à 70c, on retranchera du prix de 100 litres à 85c, qui est 100.85, le prix de 100 litres à 70c, qui est 100.70, et l'on divisera la différence 100.85 — 100.70 par 120c — 70c ou 50c différence des prix, ce qui donne 30 litres. De même, pour avoir le nombre de litres à 1f 20c, on retranchera de 120.100, prix de 100 litres à 1f 20c, le prix 85.100 de 100 litres à 85c, et l'on aura 120.100 — 85.100, qu'on divisera de même par 50, ce qui donne 70 litres.

108. Le problème des courriers (81) peut aussi bien se résoudre avec deux inconnues qu'avec une seule, ce qui fournit une application de la discussion de leurs valeurs.



Supposons d'abord le point de rencontre situé en R dans la partie BN, et soit $AB = d$. Représentons par x et par y les chemins AR et BR que doivent faire, pour arriver au point R, le premier courrier à partir du point A, et le second à partir du point B; on aura $x - y = d$. En outre les temps que les courriers mettent à parcourir, l'un AR, l'autre BR, seront res-

pectivement $\frac{x}{v}, \frac{y}{v'}$, et comme la différence de ces temps égale h ou le temps dont le premier courrier précède au point A l'arrivée du second courrier au point B, on aura $\frac{x}{v} - \frac{y}{v'} = h$.

Ainsi, les deux équations du problème sont

$$x - y = d, \quad \frac{x}{v} - \frac{y}{v'} = h,$$

d'où l'on tire, en éliminant successivement y et x par substitution,

$$x = \frac{v(d - v'h)}{v - v'}, \quad y = \frac{v'(d - vh)}{v - v'}.$$

Or, la valeur de y, qui représente BR, est précisément la même trouvée plus haut pour x qui représentait de même BR, et celle de x se conclut de celle de y en changeant seulement dans le numérateur v' en v, et réciproquement. Par conséquent la discussion du n° 81 peut s'appliquer ici presque mot pour mot, et donne les mêmes résultats, que nous nous bornerons à énoncer.

1° Tant que l'on a en même temps $v > v'$ et $d > vh$, à plus forte raison l'on aura $d > v'h$; ainsi les valeurs de x et de y seront positives, et la rencontre sera, comme on l'a supposé, au delà du point B par rapport au côté M.

2° Si l'on a $v < v'$ et $d < vh$, à plus forte raison d sera $< v'h$. Les valeurs de x et de y, étant toutes deux positives, comme dans le premier cas, donnent le même résultat.

3° Si l'on a $v > v'$ et $d < vh$, la valeur de y, devenant alors négative, montre que le point R doit se trouver en deçà du point B par rapport au côté M; et il sera au delà ou en deçà du point A par rapport au côté M, selon que la valeur de x sera positive ou négative, c'est-à-dire, selon qu'on aura $d < v'h$, ou $d > v'h$.

Lorsqu'on a en même temps $v < v'$ et $d > vh$, les conclusions restent les mêmes que tout à l'heure, selon que l'on a $d > v'h$ ou $d < v'h$.

4° Si $v = v'$, sans qu'on ait $d = vh$, on n'aura pas non plus

$d=v'h$; alors les valeurs de x et de y seront toutes deux de la forme $\frac{m}{0}$, c'est-à-dire infinies, et les courriers ne se rencontreront pas.

5° Si l'on a en même temps $v=v'$, et $d=vh$, on aura aussi $d=v'h$; alors les valeurs de x et de y seront toutes deux de la forme $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire indéterminées, puisque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteur commun qui puisse devenir nul par cette hypothèse. Les courriers sont donc toujours ensemble.

On peut également, comme plus haut, changer le sens de la marche des courriers, ou les faire aller l'un vers l'autre.

109. Problème IX. *On a acheté séparément les charges de trois voitures. La première, qui contenait* 30 *mesures de seigle,* 20 *d'orge et* 10 *de froment, a coûté* 230 *fr.; la seconde, qui contenait* 15 *mesures de seigle,* 6 *d'orge et* 12 *de froment, a coûté* 138 *fr.; la troisième, qui contenait* 10 *mesures de seigle,* 5 *d'orge et* 4 *de froment, a coûté* 75 *fr. On demande à combien reviennent la mesure de seigle, la mesure d'orge et celle de froment?*

Soient x, y, z, les trois inconnues; le problème donne les trois équations suivantes:

$$30x+20y+10z=230,$$
$$15x+6y+12z=138,$$
$$10x+5y+4z=75.$$

Divisant tous les termes de la première équation par 10, et ceux de la seconde par 3, les trois équations précédentes se trouvent remplacées par celles-ci :

$$3x+2y+z=23,$$
$$5x+2y+4z=46,$$
$$10x+5y+4z=75.$$

Multipliant tous les termes de la première équation par 4, et retranchant alors successivement chacune des deux autres, ce qui élimine z par réduction, il vient

$$7x+6y=46,$$
$$2x+3y=17.$$

Multipliant la seconde de ces équations par 2, pour éliminer y, il vient $3x=12$, d'où $x=4$. Mettant cette valeur de x dans l'équation précédente, on a $8+3y=17$, d'où $y=3$.

Enfin, faisant $x=4$ et $y=3$ dans la première des équations simplifiées, on trouve $z=5$.

Ainsi la mesure de seigle coûte 4 fr., celle d'orge 3 fr., et celle de froment 5 fr.

110. Nous engageons fortement les élèves à résoudre les problèmes indiqués dans notre Arithmétique, et ensuite ceux dont nous donnons ici les énoncés.

* *Problèmes dont la solution n'exige qu'une inconnue.*

Problème x. *Un père, interrogé sur l'âge de son fils, répond : Mon âge est triple de celui de mon fils ; il y a* 10 *ans il en était le quintuple. Quel est l'âge du fils?* — Réponse : 20 ans.

Problème xi. *Quel âge avons-nous l'un et l'autre? demande un fils à son père : celui-ci répond : Votre âge est actuellement le tiers du mien, et il y a* 6 *ans il en était le quart. Quel est l'âge de chacun?* — Réponse : Le fils a 18 ans et le père 54.

Problème xii. *On donne par jour une gratification de* 1 *fr.* 20 *cent. à un écolier, quand il remplit bien son devoir. Il paye au contraire une amende de* 75 *cent., quand il y manque. Au bout de trente jours, il lui reste un bénéfice de* 6 *fr.* 75 *c. Combien y a-t-il eu de jours de travail et combien de jours de paresse?* — Réponse : Il y a eu 15 jours de travail et 15 jours de paresse.

Problème xiii. *Diophante, l'auteur du plus ancien livre d'Algèbre qui nous reste, passa dans sa jeunesse le sixième du temps qu'il vécut, un douzième dans l'adolescence ; ensuite il se maria, et passa dans cette union le septième de sa vie augmenté de* 5 *ans avant d'avoir un fils, auquel il survécut de* 4 *ans, et qui n'atteignit que la moitié de l'âge où son père est parvenu. Quel âge avait Diophante quand il mourut?* — Réponse : 84 ans.

Problème xiv. *Hiéron, roi de Syracuse, avait remis à un orfèvre* 10 *livres d'or, pour faire une couronne qu'il voulait*

offrir à Jupiter. Le travail étant achevé, la couronne se trouva du poids de 10 *livres; mais le roi, soupçonnant l'ouvrier d'avoir allié de l'argent à l'or, vint consulter Archimède. Celui-ci, sachant que l'or perd dans l'eau les* 52 *millièmes de son poids, et que l'argent y perd les* 99 *millièmes de son poids, détermina le poids de la couronne plongée dans l'eau, et trouva qu'il était de* 9 *livres* 6 *onces, ce qui lui fit reconnaître la fraude. On demande combien il y avait de livres de chaque métal dans la couronne?* — Réponse : 7 livres 12 onces $\frac{12}{47}$ d'or et 2 livres 3 onces $\frac{35}{47}$ d'argent. (Nous avons cru devoir conserver ici les anciennes mesures.)

Problème xv. *Deux personnes ont le même revenu; la première épargne chaque année le cinquième de son revenu, et la seconde, qui dépense* 600 *fr. par an de plus que la première, doit, au bout de* 3 *ans,* 1140 *fr. Quel est le revenu commun?* —Réponse : 1100 fr.

Problème xvi. *Un père ordonne par son testament que sa fortune sera partagée entre ses quatre enfants de la manière suivante : l'aîné prendra le tiers de l'héritage, plus* 4000 *fr.; le second prendra le quart de la part de l'aîné, moins* 2000 *f.; le troisième prendra la moitié de la somme des deux premières parts; alors il doit rester* 31500 *fr. pour la part du dernier. Quelle était la valeur de l'héritage et la part des trois premiers enfants?*—Réponse : L'héritage était de 96000 fr., l'aîné a eu 36000 fr., le second 7000 fr. et le troisième 21500 fr.

Problème xvii. *Un père ordonne par son testament que l'aîné prenne sur l'héritage une somme a, plus la n^e partie du reste, que le second prenne sur ce qui reste ensuite une somme $2a$, plus la n^e partie du reste, que le troisième prenne sur ce qui reste ensuite une somme $3a$, plus la n^e partie du reste, et ainsi de suite. L'héritage du père étant partagé en entier, tous les enfants ont la même part. On demande la valeur de l'héritage, le nombre des enfants et la part de chacun?* — Réponse : L'héritage est $a(n-1)^2$, le nombre des enfants est $n-1$, et leur part $a(n-1)$.

** *Problèmes exigeant plusieurs inconnues.*

PROBLÈME XVIII. *Deux personnes ont fait en commun une dépense de* 81 *francs. Il manque au premier, pour payer cette dépense, les* $\frac{2}{3}$ *de l'argent du second, et il manque au second les* $\frac{3}{5}$ *de l'argent du premier. Quel est l'avoir de chacun?* — Réponse : Le premier a 45 fr. et le second 54 fr.

PROBLÈME XIX. *Un homme, rencontrant des pauvres, veut donner* 25 *cent. à chacun; mais en comptant sa monnaie il s'aperçoit qu'il lui manque pour cela* 10 *cent.; alors il ne donne que* 20 *cent. à chaque pauvre, et il lui reste* 25 *cent. Combien cet homme avait-il de monnaie, et combien y avait-il de pauvres?* — Réponse : Il avait 1 fr. 65 cent., et le nombre des pauvres était 7.

PROBLÈME XX. *Trois joueurs sont convenus qu'à chaque partie le perdant doublera l'argent des deux autres. Après trois parties, chacun des joueurs n'en ayant perdu qu'une, se retire avec* 120 *fr. On demande la somme que chaque joueur avait en se mettant au jeu?* — Réponse : Le premier, 195 fr.; le second, 105 fr.; le troisième, 60 fr.

PROBLÈME XXI. *Un nombre est formé de quatre chiffres dont la somme est* 11; *le chiffre des dizaines est égal à la somme des chiffres des centaines et des mille; celui des mille est égal à la somme de ceux des centaines et des unités; et quand on retranche* 1728 *du nombre demandé, on obtient pour reste le même nombre renversé. Quel est ce nombre?* — Réponse : 3251.

PROBLÈME XXII. *La poudre à canon est composée de salpêtre, de soufre et de charbon. Le mélange est tel que, sur* 100 *kilog., le triple du salpêtre employé se trouve égaler* 13 *fois celui du charbon, plus* 5 *fois celui du soufre, et que* 5 *fois le poids du salpêtre vaut* 37 *fois le poids du soufre, moins* 7 *fois celui du charbon. On demande la proportion du mélange?* — Réponse : Sur 100 kil. de poudre, il y a 75 kil. de salpêtre, et 12,5 kil. tant de soufre que de charbon.

Problème xxiii. *Un bataillon de 600 hommes occupe les quatre étages d'une caserne. Il y a au premier étage 2 fois autant d'hommes qu'au quatrième, et le nombre d'hommes du second et du troisième réunis égale celui des hommes du premier et du quatrième réunis ; enfin, il y a au troisième les* $\frac{5}{7}$ *du second. Quel est le nombre d'hommes à chaque étage?* — Réponse : Au premier, 200; au second, 175; au troisième, 125; au quatrième, 100.

Problème xxiv. *Un homme, qui s'est chargé de transporter des vases de porcelaine de trois grandeurs, est convenu de payer, pour chaque vase qu'il cassera, autant qu'il doit recevoir pour chaque vase rendu en bon état.*

On lui donne d'abord 2 petits vases, 4 moyens et 9 grands. Il casse les moyens, rend les autres en bon état, et reçoit 28 fr.

On lui donne ensuite 7 petits vases, 3 moyens et 5 grands; cette fois il casse les grands, et reçoit seulement 3 fr.

Enfin, on lui remet 9 petits vases, 10 moyens et 11 grands; il casse encore tous les grands, et ne reçoit que 4 fr.

Quel est le prix du transport d'un vase de chaque grandeur? — Réponse : Le prix est 2 fr. pour les petits, 3 fr. pour les moyens et 4 fr. pour les grands.

Problème xxv. *Trois billets, qui valent ensemble 2790 fr., ont été escomptés en dehors à 5 p °/₀. Le premier est à 7 mois d'échéance, le second à 5 mois, le troisième à 4 mois. On a perdu sur le premier billet autant que sur les deux autres ensemble, et sur le second 1 fr. de moins que le tiers de ce qu'on a perdu sur les deux autres ensemble. Quelle est la valeur de chaque billet?* — Réponse : Le premier billet vaut 1080 fr., le second, 720 fr., et le troisième, 990 fr.

SECTION III.

ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU PREMIER DEGRÉ.

111. Nous avons dit (94) qu'un problème est indéterminé,

lorsqu'il conduit à un certain nombre d'équations renfermant un plus grand nombre d'inconnues, et qu'alors il est susceptible de recevoir un nombre infini de solutions. Quelquefois le problème indique certaines conditions qui ne sont pas susceptibles d'une traduction algébrique, mais qui limitent le nombre des solutions : par exemple, on peut demander que les valeurs des inconnues soient entières, ou même entières et positives, etc. Nous allons examiner les principales de ces conditions.

§ 1er. *Résolution, en nombres entiers, de l'équation générale du premier degré à deux inconnues.*

112. Cherchons les solutions entières d'une équation à deux inconnues x et y, que nous supposerons ramenée à la forme

$$ax + by = c \quad (1),$$

a, b, étant des nombres entiers positifs ou négatifs.

On voit d'abord que si a et b ont un facteur commun qui ne divise pas c, l'équation ne sera susceptible d'aucune solution en nombres entiers. Car soit d le facteur commun de a et de b, en divisant les deux membres de l'équation par d, on aura

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{c}{d};$$

or, si l'on ne donne à x et à y que des valeurs entières, le premier membre, étant toujours un entier, ne peut égaler le second membre, qui est fractionnaire; ainsi, dans ce cas, il n'y a pas de solution entière.

Supposons donc a et b premiers entre eux.

Si le coefficient de l'une des inconnues était l'unité, il serait facile de résoudre l'équation. Soit, par exemple, $a = 1$, alors on obtient immédiatement $x = c - by$, d'où l'on tire, pour chaque valeur entière de y, une valeur correspondante de x entière aussi.

Quand aucun des coefficients a et b n'est l'unité, voyons s'il est possible de ramener la résolution de l'équation proposée à celle d'une autre équation à deux inconnues, et dont l'un des

coefficients soit l'unité, ce qui ferait rentrer dans le cas précédent.

Soit $a<b$; prenant dans l'équation $ax+by=c$ la valeur de l'inconnue x censée avoir le plus petit coefficient, on obtient

$$x=\frac{c-by}{a};$$

divisant b par a, nommant q le quotient et r le reste, on aura $b=aq+r$; substituant à b cette valeur dans l'équation, il vient

$$x=\frac{c-(aq+r)y}{a}=-qy+\frac{c-ry}{a}.$$

Pour que la valeur de x soit entière, il faut que les deux parties dont elle se compose soient des entiers, quand on donnera des valeurs entières à y : or, dans ce cas, la partie $-qy$ sera toujours entière; il faudra donc choisir des valeurs entières de y, telles que $\frac{c-ry}{a}$ soit un entier. Par conséquent, si l'on égale cette expression à une nouvelle indéterminée t, on aura l'équation

$$\frac{c-ry}{a}=t, \quad \text{ou} \quad at+ry=c \ (2),$$

dont les solutions entières en t et y donneront celles de la proposée. Le reste r n'est pas nul, puisque a et b sont premiers entre eux. S'il était égal à 1, la question serait résolue comme on l'a vu plus haut, dans le cas où le coefficient de l'une des inconnues est égal à 1.

Comparant l'équation (2) avec la proposée, on voit qu'elle renferme également deux inconnues, mais affectées de coefficients moins forts, puisque r est $<a$ et à plus forte raison $<b$.

Prenant de même la valeur de l'inconnue y, qui a le plus petit coefficient, il vient

$$y=\frac{c-at}{r}.$$

Soit q' le quotient de la division de a par r, et r' le reste, nous aurons $a=rq'+r'$, et par suite

$$y = \frac{c-(rq'+r')t}{r} = -q't + \frac{c-r't}{r}.$$

Pour que y soit un entier, il faut, comme plus haut, choisir des valeurs entières de t, telles que $\frac{c-r't}{r}$ soit un entier. Soit $\frac{c-r't}{r} = t'$ une autre indéterminée; on aura

$$rt' + r't = c, \qquad (3)$$

dont les solutions entières en t et t' donneront celles de la proposée; et si le reste r' était 1, la question serait résolue.

Lorsque ce reste r' n'est pas 1, on opère sur l'équation (3) exactement comme on l'a fait sur l'équation (2), et l'on en déduit une nouvelle équation $r't'' + r''t' = c$, où r'' est le reste de la division de r par r', et dont les solutions entières en t' et t'' donneront celles de la proposée.

Il est facile de voir que dans les équations successivement déduites de la proposée, les coefficients des indéterminées diminuent de plus en plus, et sont précisément les restes successifs qu'on obtiendrait en cherchant le plus grand commun diviseur entre a et b; or ces nombres, étant premiers entre eux, n'ont d'autre commun diviseur que l'unité, et alors le reste qui précédait le diviseur 1 était de même 1. Par conséquent, en suivant la marche indiquée, on arrivera nécessairement à une équation entre deux indéterminées, dont l'une aura l'unité pour coefficient. La résolvant par rapport à cette indéterminée t'', par exemple, on éliminera par substitution toutes les indéterminées intermédiaires entre la dernière t'' et les inconnues x et y qui seront alors des fonctions de t''. Donnant à t'' une valeur arbitraire entière, on obtiendra pour x et pour y une valeur également entière; et comme on peut donner à t'' une infinité de valeurs entières, il en résultera pour x et pour y une infinité de valeurs entières correspondantes. On voit d'ailleurs que l'élimination dispense de calculer les indéterminées intermédiaires.

113. On peut aussi démontrer *à priori* que l'équation $ax + by = c$ a nécessairement une solution entière, dès que a et b sont premiers entre eux. La démonstration est fondée

sur ce que, si l'on substitue à y les a nombres successifs 0, 1, 2, 3............$(a-1)$, et qu'on prenne les valeurs de x correspondantes, en effectuant la division par son coefficient a, on obtient a restes qui doivent tous être différents et plus petits que a : d'où il résulte que l'un de ces restes est nul, et donne pour x une valeur entière, formant, avec la valeur correspondante de y, une solution entière.

114. Il est facile de trouver la loi des valeurs de x et de y. Car soit $x=\alpha$, $y=\beta$, une solution entière; par cette substitution, l'équation proposée devient l'égalité $a\alpha+b\beta=c$, qui, retranchée de la première, donne

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0, \quad \text{d'où} \quad y=\beta+\frac{a(\alpha-x)}{b}.$$

Or cette formule peut donner toutes les solutions de la question, puisqu'à chaque valeur entière de x doit correspondre une valeur entière de y. Ainsi $\frac{a(\alpha-x)}{b}$ doit être un entier : mais a et b sont premiers entre eux; donc le second facteur $(\alpha-x)$ du produit $a(\alpha-x)$ doit être divisible par b (voy. notre Arith., n° 62), c'est-à-dire être un multiple de b, tel que bt. On aura donc

$$y=\beta-at, \quad x=\alpha+bt,$$

et si l'on donne à t toutes les valeurs entières possibles, on en déduira autant de valeurs entières pour x et y. Faisant $t=o$, on retombe sur la solution $x=\alpha$, $y=\beta$. Donnant successivement à t toutes les valeurs 1, 2, 3..., on aura, en joignant la première solution,

$$x=\alpha,\ x=\alpha+b,\ x=\alpha+2b,\ x=\alpha+3b,\ldots.$$
$$y=\beta,\ y=\beta-a,\ y=\beta-2a,\ y=\beta=4a\ldots\ldots$$

Donnant de même à t toutes les valeurs $-1, -2, -3\ldots$, on aura

$$x=\alpha-b,\ x=\alpha-2b,\ x=\alpha-3b,\ldots\ldots$$
$$y=\beta+a,\ y=\beta+2a,\ y=\beta,+3a\ldots\ldots$$

Concluons de là que *les solutions entières de l'équation* ax+by=c *sont les termes correspondants de deux progressions par différence, dont la raison est, pour celle des valeurs de* x, *le coefficient de* y *pris avec un signe contraire, et, pour*

celle des valeurs de y, *le coefficient de* x, *pris avec son signe.*

Ainsi les deux progressions sont l'une croissante et l'autre décroissante pour l'équation $ax + by = c$; car si elles croissaient en même temps, la somme $ax + by$ serait bientôt plus grande que c. Mais les deux progressions sont en même temps croissantes ou décroissantes pour l'équation $ax - by = c$, pour que la différence $ax - by$ soit toujours la même. On voit donc qu'il est facile d'obtenir une infinité de solutions entières, dès que l'on en connaît une seule.

115. *Remarques.* 1° Si dans l'équation $ax + by = c$ on a $c = 0$, elle devient $ax + by = 0$, qui est satisfaite par $x = 0, y = 0$. Alors les formules précédentes deviennent $x = bt$, $y = -at$. On voit d'ailleurs bien clairement qu'il doit en être ainsi; car a et b étant premiers entre eux, et x étant égal à $-\frac{by}{a}$, une valeur entière de y ne peut donner une valeur entière pour x, que dans le cas où cette valeur de y est un multiple de a, ou bien de la forme at: de même pour y exprimé en fonction de x.

2° Lorsque c est multiple de l'un des coefficients, a, par exemple, il est de la forme $c = am$, et l'équation devient $ax + by = am$, qui est satisfaite par $y = 0$, $x = m$; alors les formules deviennent $y = -at$, $x = m + bt$.

3° On peut diminuer le nombre des transformations à effectuer pour arriver à l'équation finale où l'un des coefficients doit être l'unité, lorsqu'on obtient une transformée dont la partie fractionnaire, qui est toujours de la forme $\frac{m - nt}{r}$, offre dans les deux nombres m et n un facteur commun premier avec r. Soit, par exemple, $m = m'd$, et $n = n'd$, l'expression devient $\frac{d(m' - n't)}{r}$; or, pour qu'elle soit entière, il faut nécessairement que r, qui ne divise pas d, divise $(m' - n't)$; ainsi, au lieu de poser $\frac{dm' - dn't}{r} = t'$, on écrira simplement $\frac{m' - n't}{r} = t'$, où n' est évidemment $< n$.

4° Lorsque le coefficient de l'inconnue, dans la partie frac-

tionnaire, est tel que sa division par le dénominateur donne un reste plus grand que la moitié de celui-ci, on diminue encore les transformations, en prenant le quotient par excès d'une unité, ce qui donne un reste négatif, mais plus faible en valeur absolue que le reste positif résultant du quotient pris par défaut comme à l'ordinaire. Un exemple donné plus loin (121) fera reconnaître l'avantage de cette manière d'opérer, qui n'a pas besoin de démonstration.

§ 2. *Résolution, en nombres entiers positifs, de l'équation générale du premier degré à deux inconnues. Principes sur les inégalités.*

116. Quand on ne veut admettre que les solutions entières et positives de l'équation $ax+by=c$, il est facile, après avoir opéré comme dans le cas précédent, de déduire des mêmes formules $x=\alpha+bt$, $y=\beta-at$, les limites des valeurs entières qu'il faut donner à la dernière indéterminée t, pour que x et y soient positifs.

1° Supposons d'abord a et b de même signe ou plutôt positifs, car s'ils étaient tous deux négatifs en changeant les signes, on aurait $ax+by=-c$, ce qu'on ne veut pas admettre. Alors pour que x et y soient positifs, il faut qu'on ait à la fois $\alpha+bt>0$ ou $t>\frac{-\alpha}{b}$, et $\beta-at>0$ ou $t<\frac{\beta}{a}$. Ainsi l'une des limites est par excès, et l'autre par défaut, de sorte qu'on ne peut prendre pour t que les nombres entiers intermédiaires entre ces deux limites. Les limites sont comprises elles-mêmes dans ces valeurs de t, car si $t=\frac{\beta}{a}$ supposé entier, on aura $y=0$. On voit, en outre, que les valeurs de x et de y vont les unes en croissant, les autres en décroissant, comme l'exige l'équation proposée.

Examinons maintenant les trois circonstances différentes que peuvent offrir les limites.

D'abord on ne peut avoir aucune solution, et par conséquent la question est absolument impossible, lorsque les limites

sont contradictoires, comme par exemple, $t < 15\frac{1}{2}$ et $t > 12\frac{1}{3}$; car on aurait alors $\frac{\beta}{a} < -\frac{\alpha}{b}$ ou $a\alpha + b\beta < 0$, ce qui ne peut être, puisque α et β devant satisfaire à la proposée, on a nécessairement $a\alpha + b\beta = 0$, quantité positive.

Lorsque la différence entre les limites est < 1, il peut arriver qu'elles ne comprennent pas entre elles de nombre entier, comme, par exemple, les limites $\frac{4}{7}$ et $\frac{6}{7}$; alors la question est impossible. Mais si elles comprennent un nombre entier, comme les limites $\frac{6}{7}$ et $\frac{8}{7}$, la question admet une solution.

Enfin, lorsque la différence entre les limites est > 1, la question peut admettre, selon le cas, une ou plusieurs solutions.

2° Si a et b ont des signes contraires, comme dans l'équation $by - ax = c$, les formules deviennent $x = \alpha + bt$, $y = \beta + at$. Alors il faut qu'on ait à la fois $\alpha + bt > 0$ et $\beta + at > 0$, ou bien $t > \frac{\alpha}{b}$ et $t > \frac{\beta}{a}$; or l'une des limites étant comprise dans l'autre, c'est comme s'il n'y en avait qu'une seule. Donc x et y croissent ensemble indéfiniment, à partir des valeurs correspondantes à $t = \frac{\beta}{a}$, si c'est un nombre entier; dans le cas contraire, le nombre entier immédiatement supérieur est la première valeur qu'on peut donner à t.

117. *Remarque* I. Si dans l'équation $ax + by = c$ les nombres a, b, c sont positifs, et que chacun des coefficients a, b soit $> c$, il n'y aura évidemment aucune solution entière et positive.

Lorsqu'un seul des coefficients est $> c$, il ne peut y avoir de solution entière et positive que si l'autre coefficient est un diviseur de c, et alors il ne peut y en avoir qu'une : car soit $b > c$, si l'on fait $y = 0$, il vient $x = \frac{c}{a}$, solution positive entière, si a divise c; si l'on fait seulement $y = 1$, on a $x = \frac{c - b}{a}$, valeur négative.

La même remarque n'est pas applicable à l'équation

$$ax - by = c.$$

118. *Remarque* II. Nous avons parlé (116) d'une auxiliaire t à déterminer de manière qu'on ait $\alpha + bt > 0$. Ceci nous conduit naturellement à examiner les propriétés les plus essentielles des inégalités.

Tant que les inégalités ne contiennent que des quantités toujours positives, et ne sont combinées qu'avec des quantités positives, on peut leur faire subir les mêmes transformations qu'aux équations, sans changer le sens des inégalités primitives. Mais quand elles contiennent des quantités négatives, il faut prendre certaines précautions, pour éviter les transformations inexactes.

La considération des quantités négatives (17) montre que les deux inégalités $a > b$ et $a - b > 0$ expriment toujours les mêmes conditions, quels que soient les signes de a et de b. De là résultent les principes suivants :

1° *Une inégalité n'est pas troublée quand on ajoute à ses deux membres ou qu'on en retranche la même quantité.* Si l'on a donc $a > b$, on aura de même $a \pm c > b \pm c$.

D'où il suit que *pour transposer un terme d'un membre dans l'autre, il faut l'écrire dans celui-ci avec un signe contraire à celui dont il était affecté;* et que *si l'on change le signe de tous les termes, il faut renverser le signe de l'inégalité.*

2° *Une inégalité n'est pas troublée, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise les deux membres par une quantité positive.*

Ainsi de $a > b$ on déduit $am > bm$, et de $-a > -b$ on déduit $-am > -bm$.

D'après cela on peut faire disparaître les dénominateurs d'une inégalité, comme pour les équations.

3° *Une inégalité doit être prise en sens contraire quand on multiplie ou qu'on divise les deux membres par une quantité négative; et il faut alors renverser le signe de l'inégalité.*

Car cela revient à multiplier ou à diviser les deux membres par la valeur absolue de la quantité, et à changer ensuite le signe de tous les termes.

Il résulte des trois principes précédents qu'on peut *résoudre* une inégalité renfermant une quantité inconnue au premier degré, de la même manière qu'on résout une équation en dégageant la quantité inconnue, c'est-à-dire en transformant l'inégalité primitive en une autre, dont la quantité inconnue occupe un membre et les quantités connues l'autre membre.

Par exemple, si l'on a l'inégalité

$$5x - 3 > \frac{3}{4}x - \frac{2}{3},$$

on en tire successivement

$$5x - \frac{3}{4}x > 3 - \frac{2}{3},$$
$$60x - 9x > 36 - 8,$$
$$51x > 28,$$
$$x > \frac{28}{51}.$$

Ainsi le nombre $\frac{28}{51}$ est la *limite inférieure* des valeurs de x.

§ 3. *Problèmes dont la solution dépend d'une équation du premier degré à deux inconnues.*

119. Problème I. *A l'époque de la fête d'une ville, les militaires et les bourgeois ont réuni une somme de* 1000 *fr. pour donner un bal aux dames. Les militaires ont payé chacun* 19 *fr. et les bourgeois* 13 *fr. Combien y avait-il de militaires et de bourgeois?*

Soient x le nombre des militaires et y celui des bourgeois; ces nombres seront évidemment les solutions entières et positives de l'équation

$$19x + 13y = 1000.$$

Prenant la valeur de y, puis extrayant les entiers, on a

$$y = \frac{1000 - 19x}{13} = 76 - x + \frac{12 - 6x}{13}.$$

Comme $\frac{12 - 6x}{13} = \frac{6(2 - x)}{13}$, en profitant de la remarque

faite plus haut (115, n° 3), il suffit, pour que y soit entier, de faire $\frac{2-x}{13}=t$, ce qui donne $x=2-13t$, et par conséquent

$$y=76-x+6t=74+19t.$$

Pour que x soit positif, il faut et il suffit qu'on ait $13t<2$, ou $t<\frac{2}{13}$; et pour que y soit positif, il faut et il suffit qu'on ait $74+19t>0$, d'où $19t>-74$, ou $t>-\frac{74}{19}$, ou enfin

$$t>-3\frac{17}{19}.$$

Ainsi l'on devra prendre pour t l'une des valeurs

$$t=0,\ t=-1,\ t=-2,\ t=-3,$$

ce qui donne pour x et y les valeurs correspondantes

$$x=2,\ 15,\ 28,\ 41;$$
$$y=74,\ 55,\ 36,\ 17.$$

Il y a donc en tout seulement quatre solutions :

1re. — 2 militaires et 74 bourgeois,
2e. — 15 militaires et 55 bourgeois,
3e. — 28 militaires et 36 bourgeois,
4e. — 41 militaires et 17 bourgeois.

120. Problème II. *Trouver un nombre tel qu'en le divisant par 7, on ait 3 pour reste, et qu'en le divisant par 5, on ait 1 pour reste?*

Soient N le nombre cherché, x le quotient de N par 7, et y celui de N par 5. On aura $N=7x+3$, et $N=5y+1$, d'où résulte l'équation $7x+3=5y+1$, ou $5y-7x=2$.

Prenant la valeur de y, qui a le plus petit coefficient, on a

$$y=\frac{7x+2}{5}=x+\frac{2x+2}{5}=x+\frac{2(x+1)}{5}.$$

Faisant $\frac{x+1}{5}=t$, il vient $x=5t-1$, et par suite $y=7t-1$, d'où l'on déduit pour N la formule $N=35t-4$.

On voit qu'en donnant pour valeurs à t la suite des nombres naturels depuis 1 jusqu'à l'infini, on aura pour N autant de valeurs entières et positives qui seront les termes d'une

progression par différence croissante à l'infini, et dont la raison est 35.

121. PROBLÈME III. *On demande de trouver deux nombres tels que si l'on ajoute 8 au produit du premier par 17, et qu'on retranche de cette somme le produit du second par 49, le reste soit zéro ?*

Soient x et y ces nombres, on aura

$$8+17x-49y=0, \text{ ou bien } 17x-49y=-8,$$

d'où $$x=\frac{49y-8}{17}. \quad \text{Or} \quad \frac{49}{17}=2+\frac{15}{17};$$

on aura donc $$x=2y+\frac{15y-8}{17},$$

et il faudra poser $$\frac{15y-8}{17}=t.$$

Mais si, au lieu de prendre par défaut le quotient de $\frac{49}{17}$ égal à 2, ce qui donne le reste positif 15, on prend par excès le quotient 3, on a le reste négatif -2, et par conséquent $\frac{49}{17}=3-\frac{2}{17}$, d'où résulte l'équation $x=3y-\frac{(2y+8)}{17}$; et alors il suffira de poser $\frac{2y+8}{17}=t$. Mais comme $\frac{2y+8}{17}=2\frac{(y+4)}{17}$, il suffit enfin de poser $\frac{y+4}{17}=t$, d'où l'on tire $y=17t-4$, et par suite

$$x=3(17t-4)-2t=49t-12.$$

Il résulte de là qu'on ne peut donner à t aucune valeur négative, mais que l'on aura x et y entiers et positifs, si l'on prend $t>\frac{12}{49}$, c'est-à-dire, si l'on donne à t pour valeurs la suite des nombres naturels depuis 1 jusqu'à l'infini.

Les valeurs de x et de y correspondantes à

$$t=1, 2, 3, \ldots\ldots$$

sont

$$x=37, 86, 135, \ldots\ldots$$
$$y=13, 30, 47, \ldots\ldots$$

et forment ainsi deux progressions par différence, dont la raison est 49 pour l'une et 17 pour l'autre.

Voici plusieurs exercices de calcul.

PROBLÈME IV. *De combien de manières peut-on payer* 150 *fr. avec des pièces de* 20 *fr. et de* 5 *fr.?* — Réponse : de 7 manières qui correspondent aux deux progressions dont les termes sont

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, pour les pièces de 20 fr.,
26, 22, 18, 14, 10, 6, 2; pour les pièces de 5 fr.

PROBLÈME V. *De combien de manières peut-on payer* 150 *fr., en donnant des pièces de* 20 *fr. et en recevant en échange des pièces de* 5 *fr.?* — Réponse : on peut donner en pièces de 20 fr. la suite des nombres naturels à partir de 8 jusqu'à l'infini.

PROBLÈME VI. *Les sous-officiers et soldats d'une compagnie reçoivent une certaine gratification ; chaque sous-officier a* 25 *fr., et chaque soldat* 1 *fr. ; les soldats reçoivent ensemble* 11 *fr. de plus que les sous-officiers. Combien y a-t-il de sous-officiers et de soldats?* — Réponse : on a pour les nombres de sous-officiers et de soldats les termes correspondants des deux progressions

1, 2, 3,......
36, 61, 86,......

PROBLÈME VII. *Le cycle solaire et le cycle lunaire formant, dans le calendrier Julien, le premier, une période de* 28 *ans, et le second, une période de* 19 *ans, qui ont commencé ensemble* 407 *ans avant l'ère chrétienne, trouver en quelle année on a eu* 17 *de cycle solaire et* 6 *de cycle lunaire* (*)? — Réponse : ce sont les années 176, 708, 1240, 1772, en valeurs positives.

§ 4. *Résolution, en nombres entiers, ou en nombres entiers positifs, de plusieurs équations du premier degré renfermant un plus grand nombre d'inconnues.*

122. Proposons de résoudre en nombres entiers positifs les deux équations

$$3x + 5y + 4z = 49,$$
$$7x - 7y + 6z = 23.$$

(*) Voyez, pour plus de détails sur les cycles, notre *Cosmographie*, 2e édition, nos 98 et 121.

Pour éliminer z, on multiplie la première par 3, la seconde par 2, et l'on retranche la seconde de la première, ce qui donne $29y - 5x = 101$, dont les valeurs entières de x et de y doivent convenir aux deux proposées. L'équation résultante étant résolue, comme on l'a expliqué, donne

$$x = \frac{29y - 101}{5} = 5y - 20 + \frac{4y - 1}{5}.$$

Posons $\frac{4y-1}{5} = t$, il vient $y = t + \frac{t+1}{4}$. Faisant $\frac{t+1}{4} = t'$ on en tire $t = 4t' - 1$, et par suite $y = 5t' - 1$, $x = 29t' - 26$.

Les valeurs de x et de y doivent, en outre, satisfaire aux deux proposées, de l'une desquelles tient seulement lieu l'équation d'où elles sont déduites (87). Il faut alors les substituer, dans l'une des proposées, la première, par exemple, ce qui donne

$$112t' + 4z = 132,$$

ou, en divisant par 4, $28t' + z = 33$, et $z = 33 - 28t'$. Les valeurs des inconnues en fonction de t' sont donc

$$x = 29t' - 26, \quad y = 5t' - 1, \quad z = 33 - 28t'.$$

On voit qu'il y a une infinité de solutions entières; mais si l'on veut encore qu'elles soient positives, il faut prendre t' de manière qu'on ait à la fois

$$29t' - 26 > 0, \quad \text{d'où} \quad t' > \frac{26}{29},$$

$$5t' - 1 > 0, \quad \text{d'où} \quad t' > \frac{1}{5},$$

$$33 - 28t' > 0, \quad \text{d'où} \quad t' < \frac{33}{28}.$$

Il est clair qu'on ne peut faire que $t' = 1$, ce qui donne la seule solution entière et positive $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$.

123. Reprenons maintenant le problème n° 120, en ajoutant de nouvelles conditions, ainsi qu'il suit :

Problème VIII. *Trouver un nombre tel qu'en le divisant successivement par 7, par 5, par 13 et par 17, les restes soient respectivement 13, 1, 4 et 5?*

Nommant x, y, z, v, les quotients successifs, on aura

$$N = 7x + 3, N = 5y + 1, N = 13z + 4, N = 17v + 5,$$

et par conséquent

$$7x + 3 = 5y + 1,\ 5y + 1 = 13z + 4,\ 5y + 1 = 17v + 5,$$

ou bien $\quad 5y - 7x = 2,\ 5y - 13z = 3,\ 5y - 17v = 4;$

ce sont les trois équations qu'on doit résoudre.

Quand on n'avait que la première, les valeurs de x et de y, exprimées au moyen de l'indéterminée t, étaient

$$x = 5t - 1, y = 7t - 1,$$

et l'on pouvait donner à t toutes les valeurs entières et positives possibles, qui fournissaient autant de solutions de la question. Mais comme les valeurs de y doivent satisfaire à la seconde équation qui contient une autre inconnue z, il faut éliminer y en y substituant sa valeur, ce qui donne

$$35t - 13z = 8, \quad \text{d'où} \quad z = 2t + \frac{9t - 8}{13};$$

posant $\frac{9t-8}{13} = t'$, il vient $9t = 13t' + 8$, d'où $t = t' + \frac{4(t'+2)}{9}$; posant enfin $\frac{t'+2}{9} = t''$, on a $t' = 9t'' - 2$, et par suite

$$t = 13t'' - 2,\ z = 35t'' - 6,\ y = 91t'' - 15,\ x = 65t'' - 11.$$

Si l'on n'avait que les deux premières équations, on pourrait encore donner à t'' toutes les valeurs entières et positives possibles; mais comme y entre dans la troisième équation qui contient encore une autre inconnue v, il faut, comme tout à l'heure, en éliminer y par la substitution de sa valeur en fonction de t'', ce qui donne $17v = 455t'' - 79$, d'où $v = 26t'' - 4 + \frac{13t'' - 11}{17}$. Posons $\frac{13t'' - 11}{17} = t'''$, il vient $t'' = t''' + \frac{4t''' + 11}{13}$; faisant $\frac{4t''' + 11}{13} = t''''$, on a $t''' = 3t'''' - 2 + \frac{t'''' - 3}{4}$; posant enfin $\frac{t'''' - 3}{4} = \theta$, on trouve

successivement

$$t''''=4\theta+3,\ t'''=13\theta+7,\ t''=17\theta+10,\ v=455\theta+263,$$
$$z=595\theta+344,\ y=1547\theta+895,\ x=1105\theta+639.$$

Substituant aux inconnues leurs valeurs dans l'une des quatre expressions de N, on trouve

$$N=7735\theta+4476.$$

Le plus petit nombre qui satisfait aux conditions, et qui correspond à $\theta=0$, est 4476. On voit que les valeurs de N sont les termes d'une progression par différence croissante à l'infini, et dont la raison est 7735.

Remarque. Ces exemples suffisent pour montrer comment on doit opérer dans tous les cas analogues.

124. Supposons maintenant qu'on ait deux inconnues de plus que d'équations, la question sera encore plus indéterminée; mais on peut, comme précédemment, limiter le nombre des solutions en n'admettant que celles entières et positives.

Soit d'abord l'équation à trois inconnues, $5x+4y+3z=29$, dont on demande les solutions entières et positives. La résolvant par rapport à l'inconnue z qui a le plus petit coefficient, il vient

$$z=\frac{29-4y-5x}{3}=9-y-x+\frac{2-y-2x}{3}.$$

Posant

$$\frac{2-y-2x}{3}=t,$$

on en déduit $\quad y=2-2x-3t,$

et par suite $\quad z=7+x+4t.$

Ainsi l'on peut donner à x toutes les valeurs entières et positives, et à t toutes les valeurs entières qui satisfont aux deux inégalités

$$2-2x-3t>0, \qquad (1)$$

et

$$7+x+4t>0. \qquad (2)$$

Multipliant les deux membres de la seconde inégalité par 2, il vient $14+2x+8t>0$. Ajoutant cette inégalité à la première, la somme des premiers membres sera à plus forte raison

plus grande que zéro. Alors x est éliminé, et l'on a

$$2-3t+14+8t>0, \quad \text{ou} \quad 16+5t>0, \quad \text{d'où} \quad t>-3\frac{1}{5}.$$

Éliminant de même t entre les inégalités (1) et (2), en multipliant la première par 4, la seconde par 3 et faisant la somme, on a

$$29-5x>0, \quad \text{d'où} \quad x<\frac{29}{5} \quad \text{ou} \quad x<5\frac{4}{5}.$$

Ainsi les seules valeurs entières et positives qu'on peut donner à x sont 1, 2, 3, 4, 5.

Mais l'inégalité (1) montre qu'on ne peut donner à t que des valeurs négatives, car si l'on faisait seulement $t=0$, et $x=1$, cette inégalité ne serait pas satisfaite ; l'inégalité (2) montre qu'on ne peut prendre t plus petit que -2, car si l'on prenait $t=-3$, en faisant même $x=5$, cette inégalité ne serait pas satisfaite. Ainsi l'on ne peut donner à t que les valeurs négatives -1 et -2.

Ces valeurs, substituées dans les expressions de y et de z, les rendront seulement fonctions de x, et l'on déterminera aisément les valeurs correspondantes aux 5 valeurs qu'on peut donner à x.

Le premier système de ces valeurs est

$$x=1, y=3, z=4,$$

qui satisfont en effet à l'équation proposée.

125. Proposons-nous maintenant, pour dernier exemple, de résoudre, en nombres entiers positifs, les équations

$$4x+5y+3z+2u=47,$$
$$11x+3y+7z+3u=82.$$

Ce qu'il y a de plus simple pour éliminer une inconnue, est de multiplier la première par 3 et la seconde par 2, et de retrancher la première de la seconde, ce qui éliminera u.

On trouve pour résultat l'équation

$$10x-9y+5z=23.$$

Prenant la valeur de z, qui a le plus petit coefficient, il vient

$$z=4-2x+y+\frac{3+4y}{5}.$$

Faisant $\frac{3+4y}{5}=t$, on a $y=t+\frac{t-3}{4}$.

Posant ensuite $\frac{t-3}{4}=t'$, il vient $t=4t'+3$, et la substitution donne

$$y=5t'+3,\ z=10-2x+9t'.$$

Substituant ces valeurs dans la première des proposées, on en tire

$$u=1+x-26t'.$$

On a donc les trois équations

$$u=1+x-26t',\quad z=10-2x+9t',\quad y=5t'+3,$$

qui donnent les valeurs de u, de z et de y exprimées en fonctions de x et d'une indéterminée t'.

Comme toutes les inconnues doivent être positives, il faut qu'on ait $5t'+3>0$, d'où $t'>-\frac{3}{5}$, ce qui donne 0 pour limite inférieure de t'. On aura la limite supérieure en remarquant qu'on doit avoir

$$1+x-26t'>0 \text{ et } 10-2x+9t'>0.$$

Multipliant la première inégalité par 2 et l'ajoutant à la seconde, à plus forte raison la somme sera plus grande que zéro; alors x disparaît et il vient

$$12-43t'>0,\ \text{d'où } t'<\frac{12}{43}.$$

Donc la limite supérieure de t' est également zéro; ainsi l'on a nécessairement $t'=0$, ce qui donne

$$u=1+x,\ z=10-2x,\ y=3.$$

Pour que la valeur de z soit positive, il faut qu'on ait

$$10-2x>0,\ \text{d'où } x<5.$$

Ainsi l'on ne peut prendre pour x que les nombres 0, 1, 2, 3, 4. Par conséquent, les seuls systèmes de valeurs qui satisfont aux équations proposées, sont les cinq suivants :

$$\begin{array}{lllll} x=0, & x=1, & x=2, & x=3, & x=4, \\ y=3, & y=3, & y=2, & y=3, & y=3, \\ z=10, & z=8, & z=6, & z=4, & z=2, \\ u=1, & u=2, & u=3, & u=4, & u=5. \end{array}$$

D'après ce qui précède, on verra facilement comment on doit s'y prendre pour trouver les solutions de m équations entre $m+2$ inconnues, ou, en général, de m équations entre $m+n$ inconnues.

Nous engageons le lecteur à résoudre les deux problèmes suivants :

PROBLÈME IX. *Un fermier achète* 100 *pièces de volaille pour* 100 *fr., savoir : des oies à* 3 *fr.* $^1/_2$ *la pièce, des poules à* 1 *fr.* $^1/_3$, *et des pigeons à* $^1/_2$ *fr. Combien y avait-il d'individus de chaque espèce?*

Réponse :	Oies,	5,	10,	15.
	Poules,	42,	24,	6.
	Pigeons,	53,	66,	79.

PROBLÈME X. *Trouver un nombre de quatre chiffres, tel que le premier chiffre à gauche ajouté au dernier donne* 8, *que le second ajouté au troisième donne* 7, *que le premier plus le troisième égalent ensemble les* $^2/_3$ *de la somme des deux autres, et que la somme des quatre chiffres soit* 15?

Réponse : 1257, 2346, 3435, 4524, 5613, 6702.

CHAPITRE III.

PUISSANCES ET RACINES DU SECOND DEGRÉ.

§ 1er. *Double valeur de la racine carrée. Origine des racines imaginaires.*

126. Nous avons vu en Arithmétique (nos 97 et 98) qu'on forme le carré d'un nombre en le multipliant par lui-même, et que réciproquement si l'on extrait la racine carrée du produit, on retrouve le nombre primitif. Cette racine carrée n'a qu'une seule valeur, parce qu'en Arithmétique on considère les nom-

bres seulement sous le point de vue de leur valeur absolue, et que par conséquent on les regarde tous comme positifs. Mais il n'en est pas de même en Algèbre, où l'on envisage les quantités comme pouvant être positives ou négatives, et l'on a vu (22) qu'en multipliant par elle-même une quantité, soit positive, soit négative, le produit est toujours positif. Par conséquent une quantité positive a deux racines carrées, l'une positive et l'autre négative, dont la valeur absolue est la même. Par exemple, le nombre 36, qui est le carré de 6, est également celui de -6; 36 a donc deux racines carrées $+6$ et -6. En outre, tout nombre plus petit ou plus grand que 6, pris avec le signe $+$ ou le signe $-$, donnant un carré plus petit ou plus grand que 36, ce dernier nombre ne peut donc avoir d'autres racines carrées que $+6$ et -6.

Ces mêmes considérations s'appliquent aussi bien à une quantité littérale A. En effet, si a représente une certaine quantité dont le carré soit A; comme A est à la fois (22) le carré de $+a$ et de $-a$, ces valeurs sont donc les deux racines carrées de la quantité A, qui ne peut d'ailleurs en admettre aucune autre, puisque dans toutes les suppositions particulières, la valeur numérique de A ne peut avoir que deux racines carrées, l'une positive, l'autre négative, qui sont nécessairement les valeurs des deux quantités $+a$ et $-a$.

On peut encore le démontrer de la manière suivante :

Toutes les racines carrées de A doivent évidemment vérifier l'équation $x^2 = \mathrm{A}$, et par conséquent ne peuvent être autres que les valeurs de x fournies par cette équation. Si donc a est une certaine quantité dont le carré soit A, on aura $a^2 = \mathrm{A}$, et par suite $x^2 = a^2$ ou $x^2 - a^2 = 0$, qui peut (40) se mettre sous la forme $(x-a)(x+a) = 0$. Or, si le facteur $x-a$ est zéro, l'équation est satisfaite et l'on a $x = a$. Si le facteur $x-a$ est différent de zéro, en divisant de part et d'autre par $x-a$, il vient

$$x + a = \frac{0}{x-a} = 0;\ \text{d'où l'on tire } x = -a.$$

Ainsi l'équation $x^2 = \mathrm{A}$ n'est satisfaite que par les deux valeurs $x = +a$, $x = -a$, qui sont donc les deux seules racines

carrées de A. On les écrit conjointement $\pm a$ ou $\pm \sqrt{A}$

Donc, *toute quantité a deux racines carrées égales et de signes contraires, et ne peut en avoir davantage.*

Remarque. On désigne, en général, les deux racines carrées d'une quantité A par $\sqrt{A}$, qui indique en effet que la racine peut être positive ou négative, et c'est seulement lorsqu'on veut limiter le sens de $\sqrt{a}$ à l'une des deux valeurs qu'on écrit $\pm \sqrt{A}$.

127. Toute quantité, positive ou négative, ayant nécessairement un carré positif, il en résulte qu'une quantité négative ne peut être un carré, ni par conséquent avoir de racine carrée. C'est ce qu'on énonce algébriquement en disant que la racine carrée d'une quantité négative est *imaginaire*. Par opposition, les quantités positives ou négatives sont dites *réelles*.

Quoique les quantités imaginaires n'existent pas, comme leur nom l'indique, on a néanmoins occasion de les considérer en Algèbre, aussi bien que les quantités réelles; et souvent on les décompose en deux facteurs dont l'un est réel, et l'autre égal à $\sqrt{-1}$. Prenons pour exemple le radical imaginaire $\sqrt{-A}$, A étant une quantité positive par elle-même. Celle-ci devant avoir deux racines carrées réelles, soit a l'une d'elles, on aura $a^2 = A$, et $\sqrt{-A} = \sqrt{-a^2}$. Or $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2(-1)}$; donc si l'on pose $\sqrt{-1} = x$, d'où $x^2 = (-1)$, il vient $\sqrt{a^2(-1)} = \sqrt{a^2x^2} = ax$, ou bien $a\sqrt{-1}$ en substituant à x sa valeur.

Donc $$\sqrt{-a^2} = a\sqrt{-1}.$$

On voit, en outre, que les deux racines carrées de $-A$ sont $\pm a\sqrt{-1}$, puisque tout radical carré comporte le double signe $\pm$. Mais d'après la remarque précédente (126) il suffit d'écrire en général $a\sqrt{-1}$.

§ 2. *Carré et racine carrée des monômes.*

128. Le carré d'un monôme s'obtenant en le multipliant par lui-même, on peut conclure de la règle donnée plus haut (34) pour la multiplication des monômes, que

Pour faire le carré d'un monôme, il faut élever son coefficient au carré, et doubler les exposants de chaque lettre.

Ainsi $$\left(\frac{3}{4}a^3bc^2\right)^2 = \frac{9}{16}a^6b^2c^4.$$

Réciproquement, *pour extraire la racine carrée d'un monôme, il faut prendre la racine carrée du coefficient, et diviser par 2 l'exposant de chaque lettre.*

Ainsi $$\sqrt{\frac{16}{25}a^2b^4} = \frac{4}{5}ab^2.$$

Lorsque le coefficient n'est pas un carré, ou que le monôme renferme des lettres affectées d'exposants impairs, on peut simplifier le radical en décomposant le monôme en deux facteurs, dont l'un soit un carré parfait. Alors on extrait la racine de celui-ci, et l'on indique celle de l'autre facteur.

En effet, soit par exemple le radical $\sqrt{32a^3b^2c}$. On a

$$\sqrt{32a^3b^2c} = \sqrt{16a^2b^2 . 2ac}.$$

Or si l'on pose $\sqrt{2ac} = x$, d'où $2ac = x^2$, le radical devient $\sqrt{16a^2b^2x^2} = 4abx$ ou bien $4ab\sqrt{2ac}$, en substituant à x sa valeur. Donc $$\sqrt{32a^3b^2c} = 4ab\sqrt{2ac}.$$

Remarque. Nous n'indiquons pas de signe aux racines, parce qu'elles doivent toujours être prises avec le signe $\pm$. D'ailleurs, quand la racine renferme encore un radical qu'on n'a pu faire disparaître en la simplifiant, ce signe indique suffisamment les deux valeurs de toute la racine (126, rem.). Ainsi l'expression $4ab\sqrt{2ac}$ est aussi générale que $\pm 4ab\sqrt{2ac}$.

129. D'après la règle donnée pour la multiplication des fractions (59), il est évident que

Pour former le carré d'une fraction, il faut élever ses deux termes au carré.

Réciproquement, *pour extraire la racine carrée d'une fraction, il faut prendre la racine carrée des deux termes.*

Ainsi $$\sqrt{\frac{16a^4b^2}{25c^2d^2}} = \frac{4a^2b}{5cd}.$$

Lorsque le numérateur et le dénominateur d'une fraction, dont on demande la racine, ne sont pas des carrés, on simplifie ordinairement l'expression (comme dans notre Arith., n° 108) en multipliant les deux termes par le plus simple des facteurs qui peuvent rendre le dénominateur un carré.

Soit, par exemple, la fraction $\frac{5a^2c}{18b}$. Comme $18 = 3^2 . 2$, il est clair que ce nombre multiplié par 2 doit former un carré ; de même b devient un carré, si on le multiplie par b. D'après cela, on multiplie par $2b$ les deux termes de la fraction, ce qui donne

$$\sqrt{\frac{5a^2c}{18b}} = \sqrt{\frac{10a^2bc}{36b^2}} = \frac{\sqrt{10a^2bc}}{6b} = \frac{a\sqrt{10bc}}{6b} = \frac{a}{6b}\sqrt{10bc}.$$

§ 3. *Carré et racine des polynômes.*

130. Si l'on veut former le carré d'un polynôme quelconque $a+b+c+d$, on pourra toujours le considérer comme un binôme, en regardant la somme de tous les termes, excepté le dernier, comme n'en faisant qu'un seul ; de sorte que la question se réduit à faire le carré d'un binôme. Or, d'après la règle donnée plus haut (39), on a

$$[(a+b+c)+d]^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2.$$

Pour former le carré de $a+b+c$, si l'on regarde de même $(a+b)$ comme un seul terme, on a

$$[(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2.$$

Enfin $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Donc en substituant ces valeurs, il vient

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2 = a^2 &+ 2ab + b^2 \\ &+ 2(a+b)c + c^2 \\ &+ 2(a+b+c)d + d^2,\end{aligned}$$

ce qui donne la règle suivante :

Règle générale. *Pour faire le carré d'un polynôme, il faut ajouter ensemble le carré du premier terme, le double produit du premier terme par le second, le carré du second, le double produit de la somme des deux premiers termes par le troisième, le carré du troisième, le double produit de la somme des trois premiers termes par le quatrième, le carré du quatrième ; ainsi de suite.*

Si l'on effectue les opérations indiquées, il est facile de voir que

Le carré d'un polynôme égale la somme des carrés de tous les

termes, plus tous les doubles produits de ces termes pris deux à deux.

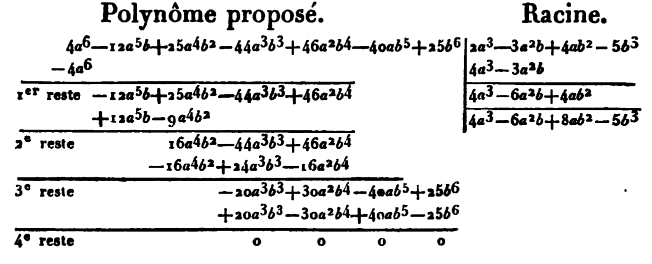
131. Soit maintenant à extraire la racine carrée d'un polynôme quelconque P. Supposons que pour former le carré de la racine, on l'ait ordonnée suivant les puissances décroissantes d'une lettre x, alors le carré se sera trouvé ordonné de la même manière par rapport à x. Mais il résulte de la règle précédente que le premier terme n'aura pas subi de réduction. Donc le premier terme du polynôme P, ainsi ordonné, est le carré du premier terme a de la racine représentée, je suppose, par $a+b+c+$ etc. Par conséquent, *on obtient le premier terme* a *en prenant la racine carrée du premier terme de* P.

Or, si du polynôme P on retranche son premier terme ou le carré a^2, le reste R devra encore contenir le double produit du premier terme a de la racine par le second b, plus le carré du second, plus etc. En outre, il est clair que le double produit $2ab$ est celui de tous les termes qui renferme la lettre principale x avec le plus haut exposant, et doit être ainsi le premier terme de R. Donc si l'on divise ce premier terme de R par $2a$ ou le double du premier terme de la racine, on aura son second terme b. En retranchant du premier reste R le produit $2ab$, plus le carré b^2, le second reste R' contiendra le double produit de la somme $a+b$ des deux premiers termes de la racine par le troisième, plus le carré du troisième, plus etc. En raisonnant sur le second reste R' comme sur le premier R, on divisera le premier terme de R' par le double $2a$ du premier terme de la racine, ce qui donnera son troisième terme c. En retranchant du reste R' le double produit de $(a+b)$ par c, on aura un troisième reste R'' dont le premier terme sera encore le produit du premier terme $2a$ de la racine par le quatrième, qu'on obtiendra donc en divisant le premier terme de R'' par $2a$. Ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait obtenu tous les termes de la racine, et par conséquent épuisé tous ceux du polynôme P, qui est le carré. Le même raisonnement s'appliquerait identiquement au cas où le polynôme proposé et sa racine seraient ordonnés par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre.

On voit qu'on suit, pour extraire la racine carrée d'un polynôme, exactement la même marche que pour les nombres (Arith. nº 103), et l'on en conclut également la règle suivante :

Règle générale. *Pour extraire la racine carrée d'un polynôme, il faut, après l'avoir ordonné, prendre la racine carrée de son premier terme, laquelle sera le premier terme de la racine; retrancher du polynôme proposé le carré du premier terme de la racine, et diviser le premier terme du reste par le double du premier terme de la racine, ce qui donnera son second terme; retrancher du premier reste le double produit du premier terme de la racine par le second terme, et le carré du second terme; diviser de même le premier terme du second reste par le double du premier terme de la racine, ce qui donnera son troisième terme; retrancher du second reste le double du produit qu'on obtient en multipliant la somme des deux premiers termes de la racine par le troisième, et le carré de ce troisième; diviser également le premier terme du troisième reste par le double du premier terme de la racine, ce qui en donnera le quatrième; ainsi de suite.*

132. L'opération se dispose également comme en Arithmétique, ainsi qu'on le voit dans l'exemple ci-après :



	Polynôme proposé.	Racine.
	$4a^6-12a^5b+25a^4b^2-44a^3b^3+46a^2b^4-40ab^5+25b^6$	$2a^3-3a^2b+4ab^2-5b^3$
	$-4a^6$	$4a^3-3a^2b$
1er reste	$-12a^5b+25a^4b^2-44a^3b^3+46a^2b^4$	$4a^3-6a^2b+4ab^2$
	$+12a^5b-9a^4b^2$	$4a^3-6a^2b+8ab^2-5b^3$
2e reste	$16a^4b^2-44a^3b^3+46a^2b^4$	
	$-16a^4b^2+24a^3b^3-16a^2b^4$	
3e reste	$-20a^3b^3+30a^2b^4-40ab^5+25b^6$	
	$+20a^3b^3-30a^2b^4+40ab^5-25b^6$	
4e reste	0 0 0 0	

On extrait la racine carrée du premier terme $4a^6$ du polynôme, ce qui donne le premier terme $2a^3$ de la racine.

On retranche du polynôme le carré de ce terme, et l'on obtient le premier reste; on divise le premier terme $-12a^5b$ de ce reste par le double $4a^3$ du premier terme de la racine, ce qui donne son second terme $-3a^2b$. On l'écrit à la racine, et aussi à côté du double $4a^3$ de son premier terme.

On multiplie la somme $4a^3-3a^2b$ par le second terme

$-3a^2b$ de la racine, et le produit, étant retranché du premier reste, on obtient le second reste, dont le premier terme $16a^4b^2$, divisé par le double $4a^3$ du premier terme $2a^3$ de la racine, donne son troisième terme $4ab^2$, qu'on écrit à la racine et à côté du double de la somme des deux premiers termes.

On multiplie la somme $4a^3-6a^2b+4ab^2$ par $4ab^2$, et le produit étant retranché du 2e reste, on obtient le 3e reste $-20a^3b^3+30a^2b^4-40ab^5+25b^6$, dont le premier terme, divisé par le double $4a^3$, du premier terme de la racine, donne son quatrième terme $-5b^3$, qu'on écrit à la racine et à côté du double de la somme des trois premiers termes.

Enfin, on multiplie cette nouvelle somme

$$4a^3-6a^2b+8ab^2-5b^3$$

par $-5b^3$, et le produit étant retranché du troisième reste, donne 0 pour quatrième reste, d'où l'on conclut que la racine cherchée est

$$2a^3-3a^2b+4ab^2-5b^3.$$

Si en avant du premier terme on avait mis le double signe $\pm$, le second terme aurait eu le double signe $\mp$, le troisième le signe $\pm$, et le quatrième le signe $\mp$; il suffit donc de prendre pour chaque terme le signe supérieur, et d'affecter l'ensemble de la racine du double signe $\pm$.

133. On reconnaît qu'un polynôme n'est pas un carré s'il se présente l'une des circonstances suivantes :

1° Si le polynôme, ordonné par rapport à une lettre, contient dans son premier ou dans son dernier terme cette lettre avec un exposant impair.

2° Si l'on parvient, dans le cours de l'opération, à un reste dont le premier terme contienne la lettre principale avec un exposant moindre que celui de la même lettre dans le premier terme de la racine. Car alors on ne pourra pas diviser le premier terme de ce reste par le double du premier terme de la racine.

3° Si l'on est conduit à mettre à la racine un terme où l'exposant de la lettre principale soit plus petit que la moitié de

l'exposant de cette lettre dans le dernier terme du polynôme proposé; car le carré de ce dernier terme de la racine ne serait pas égal au dernier terme du polynôme proposé, comme cela doit être.

Il en serait de même si, après avoir trouvé le dernier terme de la racine, et fait les opérations indiquées, le reste n'était pas nul.

Quand le polynôme est ordonné par rapport aux puissances croissantes d'une lettre, on reconnaît qu'il n'est pas un carré, lorsqu'on est conduit à mettre à la racine un terme où l'exposant de la lettre principale surpasse la moitié de l'exposant de la même lettre dans le dernier terme du polynôme.

134. Lorsque plusieurs termes d'un polynôme contiennent la lettre principale avec le même exposant, on peut considérer tous ces termes comme n'en formant qu'un seul, ainsi qu'on l'a indiqué dans la division des polynômes (50); mais alors, dans le cours des opérations, il faut développer à part les polynômes partiels pour effectuer les réductions.

§ 4. *Calcul des radicaux du second degré.*

135. Deux quantités radicales sont dites *semblables*, lorsqu'elles sont formées du même radical multiplié par des facteurs rationnels différents; telles sont les expressions

$$3a\sqrt{cd^3},\quad 5b\sqrt{cd^3}.$$

1° *Addition et soustraction.* Il est clair que pour avoir la somme ou la différence de deux quantités radicales semblables, il faut prendre la somme ou la différence de leurs facteurs rationnels, et la multiplier par le radical commun. Ainsi dans l'exemple ci-dessus on aura

$$3a\sqrt{cd^3}\pm 5b\sqrt{cd^3}=(3a\pm 5b)\sqrt{cd^3}.$$

Si les radicaux ne sont pas semblables, on ne peut qu'indiquer l'opération par les signes + ou —.

Les radicaux peuvent n'être pas semblables au premier abord, mais le devenir après une simplification. Par exemple, si l'on a la somme

$$3\sqrt{a^3b^4c}+5d\sqrt{ac},$$

on remarquera (128) que $\sqrt{a^3b^2c}=\sqrt{a^2b^2.ac}=ab\sqrt{ac}$. Alors la somme proposée devient

$$(3ab+5d)\sqrt{ac}.$$

On pourrait aussi faire entrer sous le signe radical un facteur écrit en dehors; car il suffirait de l'élever au carré.

2° *Multiplication et division.* Pour multiplier ou pour diviser l'un par l'autre deux radicaux du second degré, il faut effectuer la multiplication ou la division des quantités placées sous le radical, et affecter le résultat du radical du second degré.

Cela résulte des règles ordinaires du calcul algébrique.

En effet, on a

$$(\sqrt{a}.\sqrt{b})^2=a.b, \quad \text{et} \quad (\sqrt{ab})^2=a.b,$$

donc $$\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab}.$$

On a de même $$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Le cas de la division peut encore se déduire de ce qu'on a dit plus haut (129) pour extraire la racine carrée d'une fraction.

136. Le calcul des radicaux permet souvent de simplifier des fractions qui se présentent sous une forme assez compliquée. En voici deux exemples :

$$\frac{a}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\frac{a(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}=\frac{a(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{(\sqrt{m})^2-(\sqrt{n})^2}$$
$$=\frac{a\sqrt{m}-a\sqrt{n}}{m-n}.$$

$$\frac{a}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}=\frac{a(\sqrt{m}+\sqrt{n})}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})}=\frac{a\sqrt{m}+a\sqrt{n}}{m-n}.$$

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

SECTION PREMIÈRE.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE.

§ 1er. *Résolution de l'équation générale du second degré à une inconnue.*

137. Toute équation du second degré (11) à une inconnue x ne peut contenir que des termes de trois sortes : 1° affectés du carré x^2 de l'inconnue ; 2° affectés de x à la première puissance ; 3° tout connus. Par conséquent, si, après avoir transposé tous les termes dans le premier membre, on réunit en un seul tous ceux qui contiennent x^2, de même en un seul tous ceux qui contiennent x, enfin, en un seul les termes tout connus, l'équation sera de la forme $ax^2+bx+c=0$, qui est ainsi la plus générale des équations du second degré.

On peut simplifier cette équation, sans lui ôter sa généralité, en divisant tous les termes par le coefficient a de x^2, ce qui donne

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

ou bien, en faisant $\frac{b}{a}=p$ et $\frac{c}{a}=q$,

$$x^2+px+q=0. \qquad (1)$$

138. Le cas le plus simple est celui où le terme en x manque. Alors l'équation se ramène à la forme $x^2=m$, qui peut être considérée comme la traduction algébrique de cette question : *Trouver un nombre tel que son carré soit égal à un nombre donné* m. La résolution de l'équation se réduit évidem-

ment à une extraction de racine carrée. Or, m ayant les deux racines carrées $\pm\sqrt{m}$, et ne pouvant en avoir davantage (126), il est clair que la formule $x=\pm\sqrt{m}$ donne les deux seules solutions dont l'équation $x^2=m$ soit susceptible.

Si l'on écrivait $\pm x=\pm\sqrt{m}$, il en résulterait les quatre équations suivantes :

$$+x=+\sqrt{m},\quad +x=-\sqrt{m},\quad -x=+\sqrt{m},\quad -x=-\sqrt{m},$$

et en changeant les signes des deux membres dans les deux dernières, on retomberait sur les deux premières, qui sont ainsi les deux seules réellement différentes. Ainsi, à l'avenir, quand nous extrairons la racine carrée des deux membres d'une équation, nous ne mettrons le double signe $\pm$ que devant l'un d'eux.

Le cas particulier $x^2=m$ se déduit également de l'équation générale (1) en y faisant $p=0$, ce qui donne $x^2+q=0$, d'où $x=\pm\sqrt{-q}$, et selon que la quantité q sera négative ou positive dans l'équation, les deux valeurs de x seront réelles ou imaginaires (127), c'est-à-dire que la question sera possible ou impossible.

Appliquons ce qui précède aux deux équations suivantes :

EXEMPLE I. $\quad \dfrac{5x^2}{3}=\dfrac{4x^2}{5}+7.$

On fait d'abord disparaître les dénominateurs, et alors il vient

$$25x^2=12x^2+105,$$

d'où l'on tire successivement

$$13x^2=105,\quad x^2=\frac{105}{13}=\frac{105.13}{13^2},\quad x=\pm\frac{\sqrt{1365}}{13}=\pm\frac{37}{13}$$

à très-peu près.

EXEMPLE II. $\quad \dfrac{a-b}{x}+cx=\dfrac{bx}{c}.$

On a successivement

$$(a-b)c+c^2x^2=bx^2,$$
$$(b-c^2)x^2=(a-b)c,$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{(a-b)c}{b-c^2}}.$$

139. Prenons maintenant l'équation générale

$$(1)\ x^2+px+q=0,$$

d'où l'on tire $$x^2+px=-q.$$

Si le premier membre était un carré, comme, par exemple, dans $x^2-2ax+a^2=b$, il serait facile de résoudre l'équation. Car, en prenant la racine carrée des deux membres, on aurait

$$x-a=\pm\sqrt{b},\quad \text{d'où}\quad x=a\pm\sqrt{b}.$$

Or, le carré d'un binôme contenant le carré du premier terme, plus le double produit du premier par le second, plus le carré du second, si dans l'équation $x^2+px=-q$ on considère le premier membre comme formant les deux premiers termes du carré de $x+\frac{1}{2}p$, il est clair qu'en lui ajoutant $\frac{1}{4}p^2$ on complétera ce carré. Si donc on met $\frac{1}{4}p^2$ dans chaque membre, ce qui donne

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}p^2-q;$$

et qu'on extraie la racine carrée des deux membres, on aura

$$x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q},$$

et par suite $$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}.$$

Cette formule fournit deux valeurs pour x, et l'on est certain qu'il n'y en a pas d'autre; car la somme $x+\frac{1}{2}p$ doit égaler la racine carrée de $\frac{1}{4}p^2-q$, laquelle n'est susceptible que de deux valeurs (126, 138). Il est facile de vérifier que chacune des deux valeurs de x satisfait à l'équation (1).

Ce qui précède conduit à la règle suivante :

RÈGLE GÉNÉRALE. *Pour résoudre une équation du second degré à une inconnue x, il faut la ramener à la forme* $x^2+px+q=0$; *alors on obtient les deux seules valeurs dont l'inconnue soit susceptible en prenant avec un signe contraire la moitié du*

coefficient de x à la première puissance, plus ou moins la racine carrée de la somme qu'on obtient en ajoutant le carré de cette moitié au terme tout connu pris avec un signe contraire.

Les deux valeurs de l'inconnue s'appellent les *racines* de l'équation donnée.

140. Voici plusieurs applications.

1° Soit l'équation $x^2 - 8x + 15 = 0$; comme elle a déjà la forme indiquée ci-dessus, on prendra la moitié du coefficient -8, laquelle avec un signe contraire sera $+4$, on formera le carré 16 de cette moitié, et l'on en retranchera le terme tout connu $+15$. La racine carrée du résultat 1 ayant les deux valeurs ± 1, on aura $x = 4 \pm 1$, c'est-à-dire, $x = 3$, $x = 5$.

2° Soit l'équation

$$x^2 - \frac{3}{4}x = \frac{2}{5}x - \frac{3}{10}.$$

On aura
$$x^2 - \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right)x + \frac{3}{10} = 0,$$

d'où
$$x = \frac{23}{40} \pm \sqrt{\left(\frac{23}{40}\right)^2 - \frac{3}{10}},$$

$$x = \frac{23}{40} \pm \frac{7}{40}.$$

Les deux valeurs de x sont

$$x = \frac{3}{4}, \quad x = \frac{2}{5},$$

3° Soit enfin l'équation

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{6} = \frac{11}{12}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}.$$

Comme 12 est le plus petit commun dividende des dénominateurs, on aura successivement

$$8x^2 - 9x + 10 = 11x^2 - 6x + 4,$$
$$8x^2 - 11x^2 - 9x + 6x = 4 - 10,$$
$$3x^2 + 3x = 6,$$
$$x^2 + x = 2,$$
$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}.$$

Les deux valeurs de x sont $x=1$ et $x=-2$.

§ 2. *Composition de l'équation générale du second degré à une inconnue.*

141. Reprenons l'équation générale $x^2+px+q=0$, et représentons par a l'une des valeurs de x ou l'une des racines. L'équation devant être satisfaite lorsqu'on y remplace x par a, on a donc l'égalité $a^2+pa+q=0$, et en la retranchant de l'équation proposée, il vient

$$x^2-a^2+px-pa=0,$$

d'où
$$(x-a)(x+a+p)=0.$$

Cette équation devant être vérifiée par toutes les valeurs de x satisfaisant à la proposée, si on lui applique exactement les mêmes raisonnements qu'à l'équation $(x-a)(x+a)=0$ (126), on en conclut que les deux seules valeurs $x=a$ et $x=-a-p$ peuvent satisfaire à l'équation proposée.

De là on tire les conséquences suivantes :

1° *Toute équation du second degré à une inconnue a deux racines, et n'en peut avoir davantage.*

C'est ce qu'on a déjà démontré plus haut (139).

2° *La somme des deux racines est égale au coefficient de x pris avec un signe contraire.*

Car
$$+a-a-p=-p.$$

3° *Le terme tout connu est égal au produit des racines.*

Car a étant racine, on doit avoir $a^2+ap+q=0$, d'où

$$q=-a^2-ap=a(-a-p).$$

4° *Le premier membre de l'équation $x^2+px+q=0$ est le produit de deux facteurs formés par la différence entre l'inconnue et chaque racine.*

Cette composition de l'équation pourrait encore se déduire de l'examen des deux valeurs générales

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}.$$

§ 3. *Discussion des racines de l'équation générale du second degré à une inconnue.*

142. Examinons maintenant les différents cas que peuvent présenter les racines $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{2}p^2 - q}$ de l'équation générale $x^2 + px + q = 0$, en omettant toutefois celui de $p = 0$, qui donne l'équation $x^2 + q = 0$ déjà traitée (138).

Si l'on observe que la quantité $\frac{1}{2}p^2$ est essentiellement positive, les différents cas sont les cinq suivants :

$$1^\circ\ q < 0, \quad 2^\circ\ q = 0, \quad 3^\circ\ q > 0 \text{ et } < \frac{1}{4}p^2,$$

$$4^\circ\ q > 0 \text{ et } = \frac{1}{4}p^2, \quad 5^\circ\ q > \frac{1}{4}p^2.$$

1° Soit $q < 0$ ou négatif dans la proposée, alors la quantité $\frac{1}{4}p^2 - q$, placée sous le radical, est positive et plus grande que $\frac{1}{4}p^2$; par conséquent la racine carrée de cette quantité est réelle et plus grande que $\frac{1}{2}p$.

Ainsi les deux racines sont réelles et de signes contraires; racine $-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ est positive, et l'autre racine

$$-\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{2}p^2 - q}$$

st négative.

2° Soit $q = 0$; les racines deviennent $x = 0$, $x = -p$. Alors équation se réduit à $x^2 + px = 0$ ou $x(x+p) = 0$, qui ne ut être satisfaite que par $x = 0$ et par $x = -p$.

3° Soit $q > 0$ et $< \frac{1}{4}p^2$; alors q est positif dans la proposée, les deux racines sont réelles, comme dans le premier cas; is toutes deux ont le même signe, qui doit être contraire au ne de p, puisque le radical est $< \frac{1}{2}p$.

4° Soit $q > 0$ et égal à $\frac{1}{4}p^2$; les deux racines sont égales à $-\frac{1}{2}p$; en effet, l'équation devient

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=0, \quad \text{ou} \quad (x+\frac{1}{2}p)^2=0,$$

qui n'est évidemment satisfaite que par la seule valeur

$$x=-\frac{1}{2}p.$$

Ce cas est le passage des racines réelles aux racines imaginaires.

5° Soit q positif et $> \frac{1}{4}p^2$; la quantité placée sous le radical devenant négative, sa racine carrée est imaginaire, ainsi que les deux racines. Mais elles satisfont toujours à l'équation, puisque la substitution de l'une ou de l'autre rend le premier membre égal à zéro.

Posons $q-\frac{1}{4}p^2=m^2$; il vient

$$\frac{1}{4}p^2-q=-m^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}=\sqrt{-m^2}=m\sqrt{-1},$$

ce qui donne $\qquad x=-\frac{1}{2}p\pm m\sqrt{-1}.$

Ainsi le premier membre de l'équation revient au produit des deux facteurs

$$(x+\frac{1}{2}p-m\sqrt{-1})(x+\frac{1}{2}p+m\sqrt{-1})=(x+\frac{1}{2}p)^2+m^2,$$

et il est bien clair que la somme de deux carrés ne pouvant être égale à zéro, les racines doivent avertir de cette impossibilité en se présentant sous une forme imaginaire.

143. *Remarque.* On voit que l'équation générale du second degré $x^2-px+q=0$ peut être considérée comme la traduction algébrique du problème suivant : *Partager le nombre* p *en deux parties dont le produit soit* q ?

En effet, soit x la première partie, $p-x$ sera la seconde, et l'on aura $\quad x(p-x)=q$, d'où $px-x^2=q$,

ou bien $$x^2 - px + q = 0.$$

Si l'on a $q = \frac{p^2}{4}$, les deux parties sont égales à $\frac{1}{2}p$; mais si l'on a $q > \frac{p^2}{4}$, les deux racines sont imaginaires; d'où il résulte que le plus grand produit qu'on puisse faire avec les deux parties d'un nombre est le carré de la moitié de ce nombre.

On a changé le signe du second terme pour ne pas avoir à énoncer : *partager le nombre* $-p$, etc.

En outre, la discussion des formules de l'équation du second degré montre que

1° *Les racines réelles et positives sont les seules qui satisfassent à l'énoncé du problème.*

2° *Les racines réelles et négatives indiquent qu'on doit modifier le sens de l'énoncé en rendant soustractives quelques quantités additives ou réciproquement.*

3° *Les racines imaginaires indiquent l'impossibilité de résoudre le problème, même en faisant subir à l'énoncé les modifications qui réussissent dans le cas des solutions négatives.*

Mais, dans tous les cas, les racines satisfont toujours à l'équation qui est la traduction algébrique de l'énoncé du problème.

144. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ fournit des formules qui offrent certaines particularités bonnes à connaître. On peut trouver immédiatement les racines de cette équation en la mettant sous la forme

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Car alors les formules précédentes donnent

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}},$$

ou, en réduisant, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

On voit d'abord, par cette formule, que les racines sont réelles et inégales, ou réelles et égales, ou imaginaires, selon qu'on a

$$b^2 - 4ac > 0, \quad \text{ou} \quad b^2 - 4ac = 0, \quad \text{ou} \quad b^2 - 4ac < 0.$$

Si a et c ont des signes contraires, la valeur du radical sera $> b$, et les deux racines auront des signes contraires; si a et c sont de même signe, la valeur du radical sera $< b$, et les deux racines auront à la fois le signe de $-\frac{b}{2a}$.

145. Venons maintenant aux cas particuliers que nous voulions faire remarquer.

1° Si $a=0$, les deux racines deviennent

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2}}{0}=\frac{0}{0},$$

$$x=\frac{-b-\sqrt{b^2}}{0}=\frac{-2b}{0},$$

dont la première paraît indéterminée et la seconde infinie. Mais si l'on fait $a=o$ dans l'équation proposée, elle se réduit à $bx+c=0$, qui donne pour x la seule valeur finie et déterminée

$$x=-\frac{c}{b}.$$

Pour faire disparaître cette contradiction, examinons d'abord la première racine $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, qui devient $\frac{0}{0}$ pour $a=0$, et voyons si elle ne contient pas le facteur a commun à ses deux termes, car alors en le supprimant, et en faisant ensuite $a=0$, on aurait la vraie valeur de x (76). Le facteur a n'est pas apparent, mais le devient si l'on multiplie les deux termes par $-b-\sqrt{b^2-4ab}$. En effet, cette opération rend le numérateur de la nouvelle fraction égal à la somme de deux quantités multipliées par leur différence, c'est-à-dire égal à la différence de leurs carrés, et l'on a

$$x=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$

$$=\frac{b^2-b^2+4ac}{2b(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})},$$

d'où $$x=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

En faisant alors $a = 0$, on trouve

$$x = \frac{-2c}{b+b} = -\frac{c}{b},$$

comme ci-dessus.

Si l'on prend maintenant la seconde valeur

$$x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{-2a},$$

et qu'on multiplie ces deux termes par $-b+\sqrt{b^2-4ac}$, on trouvera

$$x = \frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}},$$

expression réellement infinie pour $a = 0$.

On peut aussi déduire directement ces deux résultats de l'équation

$$ax^2+bx+c=0,$$

en la mettant sous la forme

$$a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}=0, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x}\left(b+\frac{c}{x}\right)=-a,$$

qui doit évidemment avoir les mêmes racines que la proposée, et réciproquement. Or si l'on fait $a=0$, on a l'équation

$$\frac{1}{x}\left(b+\frac{c}{x}\right)=0,$$

dont le premier membre ne peut devenir nul qu'en posant $b+\frac{c}{x}=0$, ou $\frac{1}{x}=0$, d'où l'on tire respectivement

$$x=-\frac{c}{b}, \; x=\pm\infty.$$

On met ici devant la valeur de x le double signe $\pm$, parce que le dénominateur a pouvait être négatif ou positif avant de décroître jusqu'à zéro.

Pour voir lequel des deux signes on doit prendre dans le cas actuel, il suffit de supposer a très-petit dans la valeur correspondante de x qui est

$$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Comme alors elle devient négative, il en résulte que pour

$a=0$, on doit prendre la valeur $x=-\infty$. Si cette très-petite valeur de a eût donné x positif, alors pour $a=0$ on aurait dû prendre $x=+\infty$.

2° Si l'on a en même temps $a=0, b=0$, les deux valeurs de x (144) deviennent $\frac{0}{0}$; et en effectuant les deux transformations indiquées tout à l'heure, on trouve, en faisant $a=0$ et $b=0$, deux valeurs infinies, qui doivent l'une et l'autre être affectées du double signe $\pm$. On reconnaîtra comme ci-dessus quel signe il faut prendre pour chacune d'elles.

3° Si l'on a en même temps $a=0$, $b=0$, $c=0$, l'équation générale devient une identité, et les valeurs de l'inconnue sont tout à fait indéterminées, comme on peut aussi le voir par les formules générales (144).

§ 4. *Résolution de plusieurs problèmes du second degré.*

146. Problème I. *Trouver un nombre tel qu'en l'ajoutant deux fois au triple de son carré la somme soit égale à* 33?

Soit x le nombre inconnu, il est clair que pour le vérifier il faudrait ajouter $2x$ au triple de son carré $3x^2$, et voir si la somme fait 33.

On a donc $3x^2+2x=33$, d'où l'on tire successivement

$$x^2+\frac{2}{3}x=\frac{33}{3},$$

$$x=-\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{33}{3}},$$

$$x=-\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1+99}{9}},$$

$$x=-\frac{1}{3}\pm\frac{10}{3}.$$

Ainsi, les deux valeurs de x sont $x=3$, $x=-\frac{11}{3}=-3\frac{2}{3}$.
La première, étant positive, résout le problème dans le sens de l'énoncé. Mais il n'en est pas de même de la seconde, qui, étant négative, montre qu'on doit changer le signe de x dans l'équation : celle-ci devient alors $3x^2-2x=33$, qui est l

traduction algébrique du problème suivant : *Trouver un nombre tel que si du triple de son carré on retranche le double de ce nombre, la différence soit égale à* 33?

La valeur positive $x = \frac{11}{3}$ satisfait à ce nouvel énoncé.

147. Problème II. *Partager le nombre* p *en deux parties telles que* m *fois la première multipliée par* n *fois la seconde donne le produit* q?

Soit x la première partie, $p - x$ sera l'autre, et on aura pour l'équation du problème

$$mx \cdot n(p-x) = q,$$

d'où l'on tire successivement $mnpx - mnx^2 = q$,

$$x^2 - px + \frac{q}{mn} = 0,$$

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{q}{mn}}.$$

La discussion de ces deux valeurs n'offre aucune difficulté, et se déduit absolument des mêmes considérations employées pour les formules

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

fournies par l'équation $\quad x^2 + px + q = 0.$

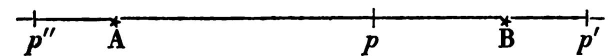
On voit que la plus grande valeur dont l'expression $\frac{q}{mn}$ soit susceptible, sans que le problème devienne impossible, est $\frac{p^2}{4}$, ce qui donne pour x deux valeurs égales à $\frac{p}{2}$.

Il suit aussi de là que le carré de la moitié d'un nombre est le plus grand produit qu'on puisse faire avec les deux parties de ce nombre (143).

148. Problème III. *Trouver sur la ligne qui joint deux lumières le point qu'elles éclairent également?*

On sait que l'intensité d'une lumière, éclairant des points qui en sont inégalement distants, décroît pour ces points en

raison inverse du carré de leur distance à cette lumière (voy. notre *Système de l'univers*, 2e *partie*, n° 26).



Représentons par a^2 et b^2 les intensités des lumières A et B pour les points situés à l'unité de distance, par d la distance AB des lumières, par p le point cherché, et par x la distance Ap, d'où B$p=d-x$. D'après le principe énoncé tout à l'heure, l'intensité de la lumière A pour le point p est évidemment donnée par le quatrième terme de la proportion

$$x^2 : 1 :: a^2 : \frac{a^2}{x^2}.$$

De même l'intensité de la lumière B pour le point p est le quatrième terme de la proportion

$$(d-x)^2 : 1 :: b^2 : \frac{b^2}{(d-x)^2}.$$

Le point p devant être également éclairé, on obtiendra donc l'équation du problème en égalant les valeurs des intensités des lumières A et B pour ce point, ce qui donne

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{(d-x)^2}.$$

Cette équation peut se ramener immédiatement à une équation du premier degré, en extrayant la racine carrée des deux membres. Il vient alors

$$\frac{a}{x} = \pm \frac{b}{d-x}, \quad \text{ou} \quad a(d-x) = \pm bx,$$

ce qui donne les deux équations

$$+a(d-x) = +bx, \quad +a(d-x) = -bx.$$

On en tire $$x = \frac{ad}{a+b}, \quad x = \frac{ad}{a-b},$$

ou enfin $$x = \frac{d}{1+\frac{b}{a}}, \quad x = \frac{d}{1-\frac{b}{a}}.$$

On voit qu'il y a deux points satisfaisant à la question.

Discussion des formules. 1° Soit $a > b$, ou l'intensité de la lumière A plus grande que celle de B, le rapport $\frac{b}{a}$ sera < 1 et les deux valeurs de x seront positives. La première valeur $\frac{d}{1+\frac{b}{a}}$, étant $> \frac{d}{2}$ et $< d$, montre que le premier point p est situé entre les deux points A et B, mais plus loin du point A que du point B, comme cela doit être. La seconde valeur $\frac{d}{1-\frac{b}{a}}$, étant $> d$, montre que le second point, également éclairé par les deux lumières, est situé au delà du point B par rapport au point A, par exemple, en p'; ce qu'il est facile de vérifier, puisque cette seconde valeur de x, satisfaisant à l'équation primitive, donne précisément, par la substitution, une égalité entre les intensités des deux lumières par rapport à ce point.

2° Soit $a < b$, ou l'intensité de la lumière A plus petite que celle de B, le rapport $\frac{b}{a}$ sera > 1. La première valeur de x sera positive et $< \frac{d}{2}$; ainsi le point également éclairé sera situé entre A et B, mais plus près de A que de B. La seconde valeur de x devenant négative et $> d$ indique un changement de direction dans la distance du second point également éclairé, qui se trouve par conséquent en un point p'' situé du côté opposé au point B par rapport au point A. En substituant cette valeur négative, $-z$ par exemple, dans l'équation primitive, on trouve

$$\frac{a^2}{z^2} = \frac{b^2}{(d+z)^2},$$

dont le premier membre $\frac{a^2}{z^2}$ représente l'intensité de la lumière A pour le point p'' situé à la distance z du point A, et dont le second membre représente l'intensité de la lumière B pour le même point p''.

ce qui donne pour x les quatre valeurs dont l'équation proposée est susceptible.

Il est facile de voir que ces formules se discutent d'une manière analogue à celles du second degré. La condition pour que les quatre racines soient réelles, est que l'on ait à la fois p négatif, q positif et $< \frac{p^2}{4}$.

Soit pour exemple l'équation $x^4 - 7x^2 - 8 = 0$. En posant $x^2 = y$, on a $y^2 - 7y - 8 = 0$, dont les racines sont $y = 8$ et $y = -1$. Par conséquent, celles de la proposée sont

$$x = \pm\sqrt{8}, \quad x = \pm\sqrt{-1},$$

dont deux réelles et deux imaginaires.

151. En général, toute équation analogue, c'est-à-dire ne contenant que deux puissances de l'inconnue dont l'une est double de l'autre, peut se ramener à la forme $x^{2m} + px^m + q = 0$, m étant un nombre entier positif. Si l'on pose $x^m = y$, l'équation résultante $y^2 + py + q = 0$ donnera pour y deux valeurs α et β. Alors pour obtenir toutes les valeurs de x satisfaisant à la proposée, il faudra résoudre les deux équations à deux termes, $x^m = \alpha$, $y^m = \beta$, dont nous nous occuperons plus tard.

§ 2. *Équations et problèmes du second degré à deux inconnues.*

152. Nous avons indiqué (chap. II, sect. 2) les divers procédés qu'on emploie pour éliminer une ou plusieurs inconnues entre des équations du premier degré; ces procédés s'appliquent également aux équations du second degré. Nous nous bornerons à deux équations entre deux inconnues, parce qu'un plus grand nombre exigerait des considérations supérieures à celles que comportent de simples éléments.

Une équation du second degré à deux inconnues x, y, peut évidemment se ramener à la forme

$$x^2 + (a + by)x + (cy^2 + dy + e) = 0,$$

ou bien, en faisant $a + by = p$ et $cy^2 + dy + e = q$, à la forme

$$(1) \qquad x^2 + px + q = 0.$$

Pareillement une autre équation entre les deux mêmes inconnues x, y, peut être représentée par

(2) $$x^2 + p'x + q' = 0.$$

Mais il ne faut pas perdre de vue que, dans ces équations, les lettres p, p', sont des fonctions du premier degré en y, et les lettres q, q', des fonctions du second degré en y.

Les deux équations étant ainsi ramenées à la forme (1) et (2), il est clair qu'on peut éliminer x^2 en les retranchant l'une de l'autre, ce qui donne

$$(p-p')x + (q-q') = 0, \quad \text{d'où} \quad x = -\left(\frac{q-q'}{p-p'}\right).$$

Mettant cette valeur de x dans l'une des équations (1) et (2), la première, par exemple, on aura

$$\left(\frac{q-q'}{p-p'}\right)^2 - p\left(\frac{q-q'}{p-p'}\right) + q = 0,$$

ou $$(q-q')^2 - p(q-q')(p-p') + q(p-p')^2 = 0,$$

ou enfin $$(q-q')^2 + (p-p')(pq'-qp') = 0.$$

Cette équation, ne contenant plus que la seule inconnue y, en fera connaître les valeurs par sa résolution, et les substituant dans l'expression de x, on aura les valeurs correspondantes de cette inconnue. Mais comme p, p' sont des fonctions de y, et q, q' des fonctions de y^2, cette équation sera généralement du quatrième degré. Nous ne ferons donc actuellement usage de ce procédé que pour les cas particuliers conduisant à une équation finale susceptible d'être résolue comme celle du second degré, nous réservant de donner plus loin (346), pour le cas général, une méthode d'élimination beaucoup plus simple.

153. PROBLÈME IX. *Trouver deux nombres* x *et* y *dont on connaît le produit* b, *et la somme* a *de leurs carrés?*

Les équations du problème sont

$$x^2 + y^2 = a, \quad xy = b.$$

On pourrait prendre la valeur de y dans la seconde et la substituer dans la première pour avoir une équation en x. Mais on peut remarquer que si l'on connaissait la somme et la différence de x et de y, il serait facile de les déterminer. Or, si l'on

ajoute et si l'on retranche, membre à membre, les deux équations, après avoir multiplié la seconde par 2, on aura

$$(x+y)^2=a+2b,\quad (x-y)^2=a-2b,$$

d'où $x+y=\pm\sqrt{a+2b},\quad x-y=\pm\sqrt{a-2b},$

et par conséquent $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{a+2b}\pm\sqrt{a-2b},$

$$y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{a+2b}\mp\sqrt{a-2b}.$$

Ces deux formules semblent au premier abord indiquer huit solutions; mais comme on doit prendre en même temps les signes supérieurs ou les signes inférieurs, pour que les deux équations, d'où on les a déduites, soient satisfaites, il est clair qu'on n'a réellement que les deux solutions suivantes :

$$x=+\frac{1}{2}\sqrt{a+2b}+\frac{1}{2}\sqrt{a-2b},\quad y=+\frac{1}{2}\sqrt{a+2b}-\frac{1}{2}\sqrt{a-2b},$$

$$x=-\frac{1}{2}\sqrt{a+2b}-\frac{1}{2}\sqrt{a-2b},\quad y=-\frac{1}{2}\sqrt{a+2b}+\frac{1}{2}\sqrt{a-2b}.$$

D'ailleurs, les deux autres systèmes de valeurs, ne différant de ceux-ci que par le signe, indiquent qu'il faut changer x en $-x$, et y en $-y$ dans les équations proposées, qui restent absolument les mêmes après ce changement.

Discussion. 1° Si a et b sont tous deux positifs, et qu'on ait $a>2b$ ou $a=2b$, le premier système donne pour x et y des valeurs réelles et positives, et le second des valeurs réelles et négatives.

2° Si l'on a $2b>a$, les deux systèmes donnent pour x et y des valeurs imaginaires, et le problème est impossible.

Remarque. Si l'on avait résolu les équations du problème par le procédé indiqué plus haut (152), on eût trouvé

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b^2}},$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b^2}}.$$

Ces valeurs, devant être identiques avec les précédentes,

n'en sont donc que des transformations. En effet, si l'on forme le carré de chacune des deux valeurs de x, on trouve le même résultat

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b^2}.$$

Il en est de même pour les deux valeurs de y.

154. **Problème x.** *Trouver deux nombres* x *et* y *tels que la différence de leurs produits par les nombres respectifs* a *et* b *soit égale à un nombre donné* p, *et que la différence de leurs carrés soit égale à un nombre donné* q?

Les équations du problème sont

$$ax-by=p,\quad x^2-y^2=q.$$

Prenant dans la première équation la valeur de y, qui est

$$y=\frac{ax-p}{b},$$

et la substituant dans la seconde, on a successivement

$$x^2-\left(\frac{ax-p}{b}\right)^2=q,$$

$$(a^2-b^2)x^2-2apx=-p^2-b^2q,$$

d'où
$$x=\frac{ap\pm b\sqrt{p^2-q(a^2-b^2)}}{a^2-b^2},$$

et reportant cette valeur dans l'expression de la valeur de y, on a

$$y=\frac{bp\pm a\sqrt{p^2-q(a^2-b^2)}}{a^2-b^2},$$

ce qui donne les deux solutions suivantes :

$$x=\frac{ap+b\sqrt{p^2-q(a^2-b^2)}}{a^2-b^2},\quad y=\frac{bp+a\sqrt{p^2-q(a^2-b^2)}}{a^2-b^2},$$

$$x=\frac{ap-b\sqrt{p^2-q(a^2-b^2)}}{a^2-b^2},\quad y=\frac{bp-a\sqrt{p^2-q(a^2-b^2)}}{a^2-b^2}.$$

Discussion. Nous supposerons que les quantités a, b, p, q sont positives ; s'il y en avait de négatives, les termes relatifs des valeurs de x et de y changeraient de signe, et il faudrait effectuer d'abord ces modifications.

1° Soit $a>b$. Si l'on a en même temps

$$p^2 > q(a^2 - b^2) \quad \text{ou} \quad q < \frac{p^2}{a^2 - b^2},$$

les valeurs de x et de y seront réelles. En outre, comme $a^2 - b^2$ est positif, le premier système donnera pour x et y des valeurs positives. La valeur de x dans le second système sera de même positive, puisque le radical est $< p$ et $b < a$; mais la valeur de y ne sera positive que si l'on a $bp > a\sqrt{p^2 - q(a^2 - b^2)}$, c'est-à-dire $q > \frac{p^2}{a^2}$, ce qui, avec la condition $q < \frac{p^2}{a^2 - b^2}$, limite les valeurs de q rendant les deux solutions du problème réelles et positives.

Mais si, outre l'hypothèse $a > b$, on a en même temps la relation $p^2 = q(a^2 - b^2)$, les deux systèmes se réduisent au suivant :

$$x = \frac{ap}{a^2 - b^2}, \quad y = \frac{bp}{a^2 - b^2}.$$

2° Soit $a < b$. La quantité $a^2 - b^2$ étant alors négative, les valeurs des inconnues sont toujours réelles. Pour trouver leurs signes, il faut changer celui des deux termes de leurs expressions, afin de rendre le dénominateur positif, ce qui donne

$$x = \frac{-ap - b\sqrt{p^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2}, \quad y = \frac{-bp - a\sqrt{p^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2},$$

$$x = \frac{-ap + b\sqrt{p^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2}, \quad y = \frac{-bp + a\sqrt{p^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2}.$$

Les valeurs de x et de y sont essentiellement négatives dans le premier système. Mais, dans le second, celle de x est toujours positive, puisqu'elle revient à

$$x = \frac{p\left(-a + b\sqrt{1 + \frac{q}{p^2}(b^2 - a^2)}\right)}{b^2 - a^2},$$

et celle de y est positive ou négative, selon que l'on a $p^2 < a^2q$, ou $p^2 > a^2q$, c'est-à-dire $q >$ ou $< \frac{p^2}{a^2}$.

3° Soit $a = b$, d'où $a^2 - b^2 = 0$. Alors le premier système donne des valeurs infinies, et le second des valeurs de la forme $\frac{0}{0}$.

On détermine aisément les valeurs de x et y dans le second système, en faisant $a=b$ dans les proposées, ce qui donne

$$x-y=\frac{p}{a},\quad x^2-y^2=q,$$

d'où
$$x=\frac{a^2q+p^2}{2ap},\quad y=\frac{a^2q-p^2}{2ap}.$$

155. Nous engageons les élèves à résoudre ces 3 problèmes :

PROBLÈME XI. *Trouver deux nombres* x *et* y *dont on donne la somme* a *et la somme* b *de leurs cubes?*

Réponse :
$$x=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{b}{3a}-\frac{a^2}{12}},$$
$$y=\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{b}{3a}-\frac{a^2}{12}}.$$

PROBLÈME XII. *Trouver deux nombres* x *et* y *tels que la somme de leurs produits par les nombres* a *et* b *soit égale à un nombre donné* p, *et que leur produit soit un nombre donné* q? — Réponse : La seule solution est

$$x=\frac{p+\sqrt{p^2-4abq}}{2a},$$
$$y=\frac{p-\sqrt{p^2-4abq}}{2a}.$$

PROBLÈME XIII. *Déterminer les côtés d'un triangle rectangle, dont on connaît le périmètre* 2p, *et la surface* m²? — Réponse : x et y étant les côtés de l'angle droit, on a

$$x=\frac{p^2+m^2+\sqrt{p^4+m^4-6p^2m^2}}{2p},$$
$$y=\frac{p^2+m^2-\sqrt{p^4+m^4-6p^2m^2}}{2p}.$$

La discussion des formules montre 1° que parmi les triangles rectangles de même surface, celui qui a le plus petit périmètre est isoscèle; 2° que le triangle isoscèle est celui des triangles rectangles, de même périmètre, qui a la plus grande surface; elle est équivalente au carré dont le côté est $p(\sqrt{2}-1)$.

§ 3. *Racine carrée des quantités en partie rationnelles et en partie irrationnelles, ou en partie réelles et en partie imaginaires.*

156. Nous avons vu (150) que les racines d'une équation du quatrième degré réductible au second se présentent ordinairement sous la forme $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, a et b étant des quantités rationnelles, et $\sqrt{b}$ une quantité irrationnelle. Pour extraire la racine carrée de ces expressions, remarquons que le carré de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $a+2\sqrt{ab}+b$, expression composée d'une partie rationnelle $a+b$, et d'une partie irrationnelle $2\sqrt{ab}$; d'où il résulte que réciproquement la racine carrée d'une quantité de la forme $a+\sqrt{b}$ peut être, au moins dans certains cas, exprimée par la somme de deux radicaux du second degré.

Pour voir dans quel cas on peut opérer cette réduction, posons

$$(1) \qquad \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$

où l'on doit déterminer x et y en valeurs commensurables.

Si l'on élève les deux membres au carré, il vient

$$a+\sqrt{b}=x+y+\sqrt{4xy},$$

d'où l'on tire $\quad a-x-y+\sqrt{b}=\sqrt{4xy}.$

En faisant encore le carré des deux membres, on a

$$4xy=(a-x-y)^2+b+2(a-x-y)\sqrt{b}.$$

Le premier membre $4xy$ étant rationnel, le second doit l'être aussi, ce qui exige que l'on ait $a-x-y=0$, d'où $x+y=a$. En substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle devient $\qquad 4xy=b$, d'où $xy=\frac{b}{4}$.

Les valeurs de x et de y sont donc celles qui satisfont à l'équation $z^2-az+\frac{b}{4}=0$; d'après ce qu'on a vu plus haut (142, 4°); par conséquent elles sont

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}, \quad y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}.$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante, pour que les va-

leurs de x et de y soient rationnelles, et que par conséquent la réduction énoncée plus haut soit possible, est que l'expression a^2-b soit un carré.

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle devient

$$(2)\quad \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

et l'on a de même

$$(3)\quad \sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Prenons pour exemple l'expression $\sqrt{8+\sqrt{15}}$. En faisant $a=8$ et $b=15$, la première formule donne

$$\sqrt{8+\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{15}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Lorsque la quantité a^2-b n'est pas un carré, les deux formules précédentes n'en sont pas moins vraies, puisqu'en élévant les deux membres au carré, on trouve des identités; mais alors elles ne sont plus utiles, les seconds membres devenant plus compliqués que les premiers.

157. Lorsque la valeur absolue de la quantité a^2-b est un carré, mais que cette quantité se trouve affectée du signe —, on est conduit à extraire la racine carrée d'une quantité en partie réelle et en partie imaginaire.

Si l'on fait alors $a=\alpha$ et $b=-\beta^2$ dans les formules (2) et (3), en observant (128) qu'on a $\sqrt{-\beta^2}=\beta\sqrt{-1}$ et d'ailleurs $\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha)(-1)$, il vient

$$(4)\quad \sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}(\sqrt{-1}),$$

$$(5)\quad \sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}(\sqrt{-1}),$$

où $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ est une quantité essentiellement réelle et plus grande que α.

Il suit de là que les expressions

$$\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}$$

sont réelles, mais peuvent d'ailleurs ne pas être rationnelles. Représentant la première par A et la seconde par B, on voit qu'on aura en général

$$\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\pm(A+B\sqrt{-1}),$$
$$\sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}}=\pm(A-B\sqrt{-1}),$$

c'est-à-dire que la racine carrée d'une quantité, en partie réelle et en partie imaginaire, se ramène également à une quantité de même forme, en partie réelle et en partie imaginaire.

Dans la première formule, on prend les quantités A et B toutes deux avec le signe $+$, ou toutes deux avec le signe $-$, parce que le produit $2AB$ doit égaler la quantité positive β. Pour la même raison, dans la seconde formule, les quantités A et B doivent être prises avec des signes contraires.

On peut arriver directement au même résultat en déterminant les valeurs réelles de x et de y susceptibles de rendre le carré de l'expression $x+y\sqrt{-1}$ égal à $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, ce qui donne

$$x^2+2xy\sqrt{-1}-y^2=\alpha+\beta\sqrt{-1}.$$

Cette équation ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait en même temps,

$$x^2-y^2=\alpha,\quad 2xy=\beta,$$

d'où $(x^2+y^2)^2=\alpha^2+\beta^2$ et $x^2+y^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$;
de là on déduit

$$x^2=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2},\quad \text{d'où}\quad x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}},$$

et $$y^2=\frac{\sqrt{\alpha+\beta^2}-\alpha}{2},\quad \text{d'où}\quad y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}.$$

Ces valeurs ramènent donc aux formules (4) et (5), et l'on peut leur appliquer l'observation précédente relative aux signes des deux parties dont elles se composent, en remarquant aussi que l'expression $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, étant égale à la somme x^2+y^2 de deux carrés, ne peut être prise qu'avec le signe $+$.

158. Supposons, par exemple, qu'on demande les racines carrées des expressions $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$, il faudra, dans les formules (4) et (5), poser $\alpha=0$, et $\beta=1$, ce qui donnera

$$\sqrt{+\sqrt{-1}}=\pm\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

$$\sqrt{-\sqrt{-1}}=\pm\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Si l'on ajoute ces deux formules, membre à membre, en se bornant au signe + pour chacune d'elles, on aura

$$\sqrt{+\sqrt{-1}}+\sqrt{-\sqrt{-1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

On voit par cet exemple que la somme de deux expressions imaginaires peut être une quantité réelle.

§ 4. *Questions sur les* maxima *et les* minima *qu'on peut résoudre par les équations du second degré.*

159. Lorsqu'une quantité croît ou décroît d'une manière continue d'après des conditions données, la plus grande et la plus petite valeur dont elle soit susceptible, d'après ces conditions, s'appellent respectivement son *maximum* et son *minimum*. Il faut bien observer que la plus grande valeur d'une quantité variable est un *maximum*, non parce qu'elle est plus grande que toutes les autres, mais parce qu'elle surpasse celles qui la précèdent et qui la suivent immédiatement. Les questions relatives aux *maxima* et *minima* exigent, en général, l'emploi du calcul différentiel, et l'on ne peut résoudre que certaines d'entre elles avec les moyens fournis par les éléments de l'Algèbre.

Nous avons déjà vu (143) que le produit des deux parties d'un nombre est le plus grand possible, c'est-à-dire, atteint son *maximum*, quand les deux parties sont égales; et nous avons indiqué (155) que parmi les triangles rectangles de même surface, celui dont le périmètre est le plus petit possible ou un *minimum* est isoscèle.

En général, lorsqu'on a une certaine fonction $F(x)$ d'une quantité variable x, et qu'on veut déterminer x de manière à rendre $F(x)$ un *maximum* ou un *minimum*, on pose $F(x)=m$, par exemple, ce qui donne une équation qu'on résout par

rapport à x, et l'on obtient une formule en m. Alors on discute cette formule en cherchant la valeur de m, qui, rendant celle de x réelle, est telle qu'en l'augmentant ou en la diminuant il en résulterait pour x des valeurs imaginaires, ce qui donnera pour $F(x)$ un *maximum* ou un *minimum*.

160. Appliquons ces considérations aux deux problèmes suivants :

PROBLÈME I. *Déterminer la valeur de* x *qui rend la fraction* $\frac{x^2-4x+16}{4x-16}$ *un* maximum *ou un* minimum?

Posons $$\frac{x^2-4x+16}{4x-16}=m;$$

on aura $x^2-4x+16=4mx-16m$,

ou $x^2-4(m+1)x+16m+16=0$,

d'où $x=2(m+1)\pm\sqrt{4m^2+8m+4-16m-16}$,

ou bien $x=2(m+1)\pm2\sqrt{m^2-2m-3}$.

Les valeurs de x ne peuvent être réelles que si l'on a

$$m^2-2m-3>0 \text{ ou } =0.$$

Or comme $m^2-2m-3=(m+1)(m-3)$, il faut, pour que ce produit soit positif, que les deux facteurs soient de même signe, c'est-à-dire qu'on ait

$$m>3 \text{ ou } =3, \text{ ou bien } m<-1 \text{ ou } =-1.$$

La première condition montre qu'en faisant m un peu plus petit que 3, on aurait pour x des valeurs imaginaires; ainsi la fraction proposée a pour *minimum* la valeur 3 qui correspond à $x=7$.

La seconde condition $m=-1$ montre qu'en donnant à m une valeur un peu plus grande, on aurait pour x des valeurs imaginaires, et qu'ainsi -1 est le *maximum* des valeurs négatives de m, lequel correspond à $x=0$.

Les valeurs de m peuvent donc être considérées comme partagées en deux séries, les unes positives décroissantes dont la limite inférieure ou le *minimum* est 3, les autres négatives croissantes dont la limite supérieure ou le *maximum* est -1.

PROBLÈME II. *Partager le nombre* a *en deux parties dont la somme des carrés soit un* maximum *ou un* minimum?

Soit x l'une des parties, on aura pour l'autre $a-x$; et la somme des carrés sera $x^2+(a-x)^2$.

Posons $$x^2+(a-x)^2=m,$$

d'où l'on tire $$x=\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{2m-a^2}.$$

Pour que les valeurs de x soient réelles, il faut qu'on ait $2m>a^2$ ou $=a^2$, d'où $m>\frac{a^2}{2}$ ou $=\frac{a^2}{2}$; et pour que la seconde valeur soit positive, il faut qu'on ait

$a>\sqrt{2m-a^2}$ ou $=\sqrt{2m-a^2}$, d'où $m<a^2$ ou $=a^2$.

La première condition montre qu'en faisant m un peu plus petit que $\frac{a^2}{2}$, on aurait pour x des valeurs imaginaires. Ainsi cette valeur $\frac{a^2}{2}$ donne le *minimum* de la somme des carrés des deux parties de a, lequel *minimum* correspond à la seule valeur $x=\frac{a}{2}$, et a donc lieu quand les parties sont égales.

La seconde condition montre qu'en faisant m un peu plus grand que a^2, les valeurs de x seraient imaginaires. Ainsi cette valeur a^2 donne le *maximum* de la somme des carrés des deux parties, ce qui arrive lorsque l'une des parties est nulle, alors l'autre se confond avec le nombre a lui-même.

Problème III. *Un cours d'eau d'une vitesse donnée agit à la circonférence d'une roue hydraulique; on demande quelle doit être la vitesse de la roue pour que l'effet produit soit un* maximum, *sachant que toute vitesse perdue, soit à l'entrée, soit à la sortie de la roue, occasionne une perte de force vive proportionnelle au carré de cette vitesse?*

Soit v la vitesse du courant, x la vitesse de la roue, mesurée à la circonférence, et m^2 le coefficient constant de la perte de force vive.

La vitesse perdue à l'entrée de la roue étant $v-x$, la perte de force vive en ce point sera $m^2(v-x)^2$; la vitesse perdue à la sortie de la roue étant x, la perte de force vive sera m^2x^2. On aura donc $m^2(v-x)^2+m^2x^2$ pour la perte totale de force

vive. Il s'agit de déterminer x de manière que ce total soit un *minimum*.

Pour cela, posons $m^2(v-x)^2+m^2x^2=u$; en effectuant les opérations, on a successivement

$$v^2-2vx+x^2+x^2=\frac{u}{m^2},$$

$$x^2-vx+\frac{v^2}{2}-\frac{u}{2m^2}=0,$$

d'où $$x=\frac{u}{2}\pm\sqrt{\frac{v^2}{4}-\frac{v^2}{2}+\frac{u}{2m^2}},$$

ou enfin $$x=\frac{v}{2}\pm\sqrt{\frac{u}{2m^2}-\frac{v^2}{4}}.$$

On aura évidemment la plus petite valeur qu'on puisse donner à u, sans que x cesse d'être réel, en égalant à zéro la quantité placée sous le radical, ce qui donne l'équation $\frac{u}{2m^2}-\frac{v^2}{4}=0$, d'où $u=\frac{m^2v^2}{2}$; la valeur correspondante de x étant $\frac{v}{2}$, il en résulte que la vitesse de la roue à la circonférence doit égaler la moitié de celle du cours d'eau pour que l'effet produit soit un *maximum*.

DEUXIÈME PARTIE.

PUISSANCES, RACINES ET ÉQUATIONS D'UN DEGRÉ QUELCONQUE.

CHAPITRE V.

PUISSANCES ET RACINES DES QUANTITÉS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES. CALCUL DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES ET DES RADICAUX.

SECTION PREMIÈRE.

PUISSANCES ET RACINES DES QUANTITÉS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES.

§ 1er. *Puissances et racines des monômes.*

161. Nous avons vu (4) qu'en désignant par m un nombre entier positif quelconque, la puissance m^e d'une quantité est le produit de m facteurs égaux à cette quantité. Or il résulte des règles de la multiplication (34) que si l'on multiplie entre eux m facteurs égaux à un monôme quelconque, le produit total sera composé du coefficient élevé à la puissance m^e, multiplié d'abord par la première lettre avec son exposant répété m fois, puis par la seconde lettre avec son exposant répété m fois, ainsi de suite. Par conséquent

1° *Pour former la puissance* m^e *d'un monôme, il faut élever son coefficient à la puissance* m^e, *et multiplier tous les exposants par* m.

Ainsi $$(3a^2b^3c^4)^5 = 243a^{10}b^{15}c^{20}.$$

On voit encore que la puissance m^e d'un monôme égale le produit des puissances m^{es} de tous les facteurs.

Quant au signe de la puissance, il suit de la règle des signes pour la multiplication (22), que la puissance paire d'une quantité négative résultant de la multiplication de facteurs négatifs, pris deux à deux, cette puissance aura le signe +, et que la puissance impaire d'une quantité négative résultant de la multiplication d'un nombre pair de facteurs, dont le produit est positif, par un facteur négatif, cette puissance aura le signe —. Donc

2° *Quel que soit le signe d'une quantité, ses puissances paires sont positives, et ses puissances impaires ont le même signe que cette quantité.*

D'après cela, $$(\pm 5a^3b^2c)^{2m} = +5^{2m}a^{3.2m}b^{2.2m}c^{2m}$$
et $$(\pm 5a^3b^2c)^{2m+1} = \pm 5^{2m+1}a^{3(2m+1)}b^{2(2m+1)}c^{2m+1}.$$

Il résulte des deux règles précédentes que réciproquement, *pour extraire la racine* m^e *d'un monôme, il faut prendre la racine* m^e *du coefficient, diviser par* m *l'exposant de chaque lettre, et donner à la racine le signe* ± *ou seulement le signe de la puissance, selon que l'indice de la racine est pair ou impair.*

162. D'après la règle donnée pour la multiplication des fractions (59), il est évident que

Pour former la puissance m^e *d'une fraction, il faut élever ses deux termes à la puissance* m^e.

Réciproquement, *pour extraire la racine* m^e *d'une fraction, il faut prendre la racine* m^e *des deux termes.*

Ainsi $$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad \text{et} \quad \sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{a}{b}.$$

163. Lorsque le coefficient du monôme, dont on veut extraire la racine m^e, n'est pas une puissance m^e exacte, ou que tous les exposants des lettres ne sont pas divisibles par m, on peut se borner à indiquer seulement l'opération, ou bien encore, comme on l'a vu pour la racine carrée des monômes (128), décomposer le monôme en deux produits, l'un formé de tous les facteurs qui sont des puissances m^{es} exactes, et l'autre contenant les facteurs restants. Alors on extrait la racine m^e

du premier produit et l'on indique seulement celle du second.

Par exemple, $\sqrt[4]{64a^6b^9c^{15}} = 2ab^2c^3\sqrt[4]{4a^2bc^3}$.

On ne met pas ici le signe $\pm$ à la racine, parce qu'elle renferme encore un radical qui l'indique suffisamment.

164. Quand l'exposant d'une lettre n'est pas divisible par l'indice de la racine à extraire, et qu'on applique la règle donnée ci-dessus (161), on arrive à une expression affectée d'un exposant *fractionnaire*. Soit, par exemple, $\sqrt[5]{a^3}$. La règle donnant $a^{\frac{3}{5}}$, si l'on veut qu'elle s'applique à ce nouveau cas, il faut nécessairement admettre que les deux expressions $\sqrt[5]{a^3}$ et $a^{\frac{3}{5}}$ sont identiques.

Ainsi, en général, on aura identiquement

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Mais la première expression indique simplement une opération à faire, tandis que la seconde montre de quelle manière on doit procéder.

Les extractions de racines qui ne peuvent s'effectuer complétement conduisent donc aux exposants fractionnaires, absolument de la même manière que les divisions qui ne peuvent s'effectuer complétement conduisent aux fractions.

§ 2. *Puissances et racines des nombres et des polynômes. Principes sur les facteurs premiers et sur les diviseurs des nombres.*

165. Lorsqu'on veut élever un polynôme à une puissance quelconque, on peut toujours représenter le premier terme par x, et la somme de tous les autres par a, ce qui ramènera la formation de la puissance m^e du polynôme proposé à celle de la puissance m^e du binôme $x+a$. La question se réduit donc à développer $(x+a)^m$. On pourrait y parvenir en multipliant $m-1$ fois par lui-même le binôme $x+a$; mais comme le calcul serait trop long, on a cherché une formule qui donnât directement une puissance quelconque d'un binôme. Cette formule importante s'appelle *binôme de Newton*, du nom de son inventeur.

Comme elle exige qu'on connaisse les nombres d'*arrangements*, de *permutations* et de *combinaisons* ou *produits* qu'on peut former avec un certain nombre m de lettres, en les prenant n à n, nous allons d'abord résoudre ces trois problèmes.

166. PROBLÈME I. *Déterminer le nombre d'arrangements qu'on peut former en prenant* m *lettres* n *à* n ?

Supposons qu'on ait m lettres $a, b, c, d, \ldots$ et qu'on veuille former tous les arrangements de ces lettres prises *deux à deux*, il est clair qu'il suffira d'écrire successivement à la suite de chaque lettre les $m - 1$ autres, ce qui donnera des arrangements tels que

$$\begin{array}{l} ab, ac, ad, \ldots\ldots \\ ba, bc, bd, \ldots\ldots \\ ca, cb, cd, \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Donc, en désignant par A_2 le nombre des arrangements des m lettres prises deux à deux, on aura évidemment

$$A_2 = m(m-1).$$

Maintenant si l'on veut former les arrangements des m lettres prises *trois à trois*, il suffira d'écrire, à la suite de chacun des arrangements deux à deux, les $m-2$ autres lettres, ce qui donnera pour le nombre A_3 des arrangements pris trois à trois

$$A_3 = m(-1)(m-2).$$

De même, le nombre A_4 des arrangements des m lettres prises *quatre à quatre* sera

$$A_4 = m(m-1)(m-2)(m-3).$$

L'analogie montre évidemment que chaque fois qu'on introduit une lettre de plus dans les arrangements, il entre aussi dans la formule relative un nouveau facteur moindre d'une unité que le précédent. On aura donc pour le nombre A_n des arrangements de m lettres prises n à n,

$$A_n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

On peut encore obtenir cette formule ainsi qu'il suit :

Supposons que l'on connaisse le nombre A_{n-1} d'arrangements de m lettres prises $n-1$ à $n-1$, il est clair qu'on obtiendra ceux de m lettres prises n à n, en ajoutant successive-

ment à chacun des arrangements précédents chacune des $m-(n-1)$ lettres restantes. Ainsi on obtiendra la valeur de A_n en multipliant celle de A_{n-1} par $m-n+1$.

Or, on a évidemment $A_1=m$, donc $A_2=m(m-1)$, par suite $A_3=m(m-1)(m-2)$.... et enfin

$$A_n=m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1).$$

167. Problème II. *Déterminer le nombre de permutations qu'on peut faire avec* n *lettres?*

Les *permutations* de n lettres, étant les résultats qu'on obtient en écrivant ces n lettres de toutes les manières possibles, ne sont évidemment autre chose que les arrangements de ces n lettres prises n à n. On peut donc les déduire de la formule précédente en y faisant $m=n$, ce qui donne pour le nombre cherché P_n des permutations

$$P_n=n(n-1)(n-2)\dots 1$$

ou bien

$$P_n=1.2.3.\dots\dots\dots n.$$

Cette formule peut s'obtenir directement, en remarquant que deux lettres donnant deux permutations ab, ba, on aura celles de trois lettres en plaçant successivement après chaque lettre chacune des deux permutations des deux autres, ce qui donnera 2.3 permutations, ainsi de suite, de sorte que le nombre de permutations de n lettres sera $P_n=1.2.3\dots n$.

168. Problème III. *Déterminer le nombre de combinaisons ou produits qu'on peut former avec* m *lettres prises* n *à* n?

Les *combinaisons* ou *produits* qu'on peut former avec m lettres prises n à n sont les résultats réellement distincts qu'on obtient en écrivant, à la suite les unes des autres, n de ces m lettres.

Ainsi, par exemple, les 4 lettres a, b, c, d, prises 2 à 2, ne donnent que les six combinaisons

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd.$$

Or, si l'on connaissait le nombre C_n des combinaisons ou produits de m lettres prises n à n, il est clair qu'on obtiendrait le nombre A_n d'arrangements de m lettres prises n à n, en faisant dans chaque produit le nombre P_n de permutations

dont ce produit est susceptible. D'où il résulte que

$$A_n = C_n . P_n,$$

et par conséquent

$$C_n = \frac{A_n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}.$$

On voit que $\frac{A_n}{P_n}$ est toujours un nombre entier.

Binôme de Newton dans le cas de l'exposant entier positif.

169. Cherchons comment on peut obtenir une formule donnant le développement de $(x+a)^m$, dont il a été parlé plus haut (165), et voyons d'abord si l'on ne pourrait pas la déduire de l'examen des puissances successives de $x+a$. Le calcul donne pour les trois puissances qui suivent la première :

$$\begin{aligned}(x+a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2,\\ (x+a)^3 &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^2,\\ (x+a)^4 &= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4.\end{aligned}$$

La loi des exposants se reconnaît immédiatement, mais non celle des coefficients, parce qu'ils proviennent des réductions qui se présentent lorsqu'on fait le produit de facteurs égaux. Or, on évitera ces réductions en donnant à chaque facteur un second terme différent; et alors, au lieu des trois produits précédents, on obtiendra les trois suivants:

$$(x+a)(x+b) = x^2 \begin{array}{l|l} +d & x + ab \\ +b & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 \begin{array}{l|l|l} +a & x^2 + ab & x + abc \\ +b & + ac & \\ +c & + bc & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 \begin{array}{l|l|l|l} +a & x^3 + ab & x^2 + abc & x + abcd \\ +b & + ac & + abd & \\ +c & + bc & + acd & \\ +d & + ad & + bcd & \\ & + bd & & \\ & + cd & & \end{array}$$

On reconnaît dans tous ces produits la loi suivante :

Le produit contient un terme de plus qu'il y a d'unités dans le nombre des facteurs. L'exposant de x, *terme commun à tous les facteurs binômes, va en diminuant d'une unité depuis le premier terme, où il égale le nombre des facteurs, jusqu'au dernier terme, où il est nul. Le premier terme, qui est la plus haute puissance de* x, *a pour coefficient l'unité; le terme, qui a une unité de moins dans son exposant, ou le second, a pour coefficient la somme des seconds termes des binômes; le troisième terme a pour coefficient la somme des produits de ces mêmes seconds termes, pris 2 à 2; le quatrième terme a pour coefficient la somme des produits des mêmes seconds termes, pris 3 à 3; ainsi de suite, jusqu'au dernier terme, qui est le produit de tous les seconds termes des binômes.*

Il reste à prouver que cette loi est générale et indépendante du nombre des facteurs binômes. On y parvient aisément en montrant que si elle est vraie pour le produit

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} + \ldots + tx + v$$

de m facteurs, elle aura encore lieu pour $m+1$ facteurs, c'est-à-dire en prenant un facteur binôme de plus.

En effet, soit $x+l$ cet autre facteur, le nouveau produit sera

$$\left.\begin{matrix} x^{m+1} + p \\ + l \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} x^m + q \\ + pl \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} x^{m-1} + r \\ + ql \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} x^{m-2} \ldots + v \\ \ldots + tl \end{matrix}\right| \begin{matrix} x \\ + vl \end{matrix}$$

Or, la loi des exposants n'est pas changée; car le plus haut exposant de x est $m+1$, c'est-à-dire le nombre des facteurs, et cet exposant diminue successivement d'une unité à chaque terme, jusqu'au dernier terme, où il est nul.

Il en est de même de la loi des coefficients. Celui du premier terme est 1; celui du second terme est $p+l$, ou la somme p des seconds termes des m premiers facteurs, plus l le second terme du nouveau facteur; ce coefficient est donc égal à la somme des seconds termes des $m+1$ facteurs.

Dans le cas de m facteurs, q est la somme des produits des seconds termes pris 2 à 2; en outre pl est la somme des produits de ces seconds termes par l; donc, dans le cas de $m+1$

facteurs, le coefficient $q+pl$ du troisième terme est la somme des produits des seconds termes pris 2 à 2.

Dans le cas de m facteurs, r est la somme des produits des seconds termes pris 3 à 3; en outre ql est la somme des produits de ces seconds termes pris 2 à 2 par le second terme du nouveau facteur; donc, dans le cas de $m+1$ facteurs, le coefficient $r+ql$ du quatrième terme est la somme des produits des seconds termes pris 3 à 3.

En raisonnant toujours de même, on arrivera au dernier terme vl qui est évidemment le produit de tous les seconds termes des $m+1$ facteurs.

Donc la loi énoncée plus haut, et qui a été vérifiée par la multiplication de deux facteurs, est encore vraie pour trois, par suite pour quatre, et, en général, pour un nombre quelconque de facteurs.

170. Il est maintenant facile d'obtenir le développement de la puissance m^e entière et positive d'un binôme $x+a$; car il suffit de rendre les seconds termes égaux dans le produit des m facteurs binômes précédents, c'est-à-dire de faire $a=b=c=d=$ etc., dans le produit $x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+rx^{m-3}+\ldots+tx+v$ de m facteurs. Alors p, qui égalait $a+b+c+d+$ etc., deviendra $a+a+a+a+\ldots$ pris m fois ou ma. De même q, qui égalait $ab+ac+ad+bc+\ldots\ldots$, deviendra a^2 répété autant de fois qu'on peut faire de produits avec m lettres prises 2 à 2, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)}{1.2}$ d'après ce qu'on a démontré plus haut (168); donc $q=\frac{m(m-1)}{1.2}a^2$. Ensuite r, qui égalait $abc+abd+acd+\ldots$, deviendra a^3 répété autant de fois qu'on peut faire de produits avec m lettres prises 3 à 3, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$; donc $r=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3$.

Ainsi de suite, jusqu'au dernier terme v, qui, égalant $abcd\ldots$, deviendra a^m.

On aura donc enfin

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3 x^{m-3} \ldots\ldots + a^m.$$

Nous verrons plus loin (427) que cette formule s'applique également au cas de l'exposant négatif ou fractionnaire.

171. Le développement de $(x+a)^m$ donne lieu aux remarques suivantes :

1° *L'exposant de* x *diminue d'une unité d'un terme au suivant, et de même celui de* a *augmente d'une unité, de sorte que la somme des exposants de* x *et de* a *est toujours égale à* m, *ou, ce qui revient au même, dans un terme quelconque, l'exposant de* a *égale le nombre des termes précédents, et celui de* x *égale* m *diminué du même nombre.*

Donc la puissance m^e d'un binôme homogène est un polynôme également homogène.

2° *Le coefficient de chaque terme a pour numérateur le produit des facteurs* m, m — 1, m — 2....., *jusqu'à* m — *autant d'unités qu'il y a de termes précédents moins un, et a pour dénominateur le produit des nombres naturels* 1, 2, 3....., *jusqu'à l'exposant de* a *ou le nombre des termes précédents.*

3° *On peut écrire immédiatement un terme dont on connaît le rang sans avoir besoin de calculer ceux qui précèdent.*

Ainsi pour le terme T_{n+1} du rang $n+1$ on aura

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} a^n x^{m-n}.$$

Cette formule s'appelle le *terme général* du binôme, parce qu'en y faisant successivement $n=1, n=2, n=3\ldots\ldots$, elle sert à donner tous ses termes, excepté le premier qui a lieu pour $n=0$.

Si l'on fait $n=m$, le numérateur devient égal au dénominateur, et la formule devient a^m.

4° *On passe d'un terme au suivant, en ajoutant* 1 *à l'exposant de* a, *diminuant de* 1 *celui de* x, *multipliant son coefficient par l'exposant de* x *dans ce terme, et le divisant par le nombre qui marque le rang de ce nouveau terme.*

172. On peut encore déduire de la formule du binôme plusieurs conséquences remarquables que nous avons séparées des précédentes, parce que, n'étant pas aussi directes, elles ont besoin d'être établies par une démonstration.

PREMIÈRE CONSÉQUENCE. *Les termes également éloignés des extrêmes ont les mêmes coefficients.*

1re *Démonstration.* — Le terme T_{n+1} qui en a n avant lui, est, comme on vient de le voir,

$$T_{n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}a^n x^{m-n}.$$

Or, comme il y a en tout $m+1$ termes, celui qui en a n après lui, en a $m+1-n-1$ ou $m-n$ avant lui; on le déduira donc du précédent en changeant n en $m-n$, ce qui donne

$$T_{m-n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(m-n)}a^{m-n}x^n.$$

Il reste donc à prouver qu'on a l'équation

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(m-n)}.$$

Or, en réduisant au même dénominateur, il vient

$$1.2.3\ldots(m-n)(m-n+1)\ldots(m-1)m=1.2.3\ldots n(n+1)\ldots(m-1)m.$$

Ces deux membres sont évidemment égaux comme étant tous deux composés des facteurs 1, 2, 3..., jusques et y compris m; ce qui démontre le principe énoncé.

2e *Démonstration.* — D'après la composition du binôme $(x+a)^m$, le terme T_{n+1} a pour coefficient le nombre des combinaisons ou produits qu'on peut former avec m lettres prises n à n, et de même le terme T_{m-n+1}, qui en a n après lui ou $m-n+1$ avant lui, a pour coefficient le nombre des produits qu'on peut former avec m lettres prises $m-n$ à $m-n$. Il est clair que ces deux nombres sont égaux; car à chaque combinaison ou produit qu'on obtient en prenant n lettres sur m lettres, correspondra un produit des $m-n$ lettres restantes; il y en a donc autant de la première sorte que de la seconde.

3e *Démonstration.*—Soit le c coefficient du terme de $(x+a)^m$ qui en a n avant lui. Le binôme $x+a$ restant le même quand

on change a en x et x en a, les coefficients du développement de $(x+a)^m$ resteront évidemment les mêmes après ce changement, puisqu'ils sont indépendants de x et de a. Par conséquent, d'après la loi des exposants, le terme qui, dans le développement de $(a+x)^m$, en a n avant lui, aura le même coefficient c.

173. Deuxième conséquence. *Si* x *est positif et* a *négatif, les termes du développement seront alternativement positifs et négatifs.*

Car si dans le développement de $(x+a)^m$ on remplace a par $-a$, tous les termes où l'exposant de a est pair resteront positifs, et tous ceux où l'exposant de a est impair deviendront négatifs; or, ces derniers termes sont évidemment tous ceux de rang pair : on aura donc

$$(x-a)^m = x^m - \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} - \text{etc.}$$

174. Troisième conséquence. *La somme des coefficients de tous les termes du développement de* $(x+a)^m$, *y compris ceux des termes extrêmes, égale* 2^m; *et la somme des coefficients des termes de rang pair égale la même somme pour les termes de rang impair.*

En effet, si dans les développements de $(x+a)^m$ et de $(x-a)^m$ on fait $x=1$ et $a=1$, on aura

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots,$$

et $$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots.$$

Il suit encore de là que la somme des produits, qu'on peut faire avec m lettres prises 1 à 1, 2 à 2, ... $(m-1)$ à $(m-1)$, m à m, est égale à 2^m-1.

175. Quatrième conséquence. Le *binôme* $x^m - a^m$ *est divisible par* $x-a$.

En effet, posons $x-a=z$, d'où $x=a+z$, on aura

$$x^m - a^m = (a+z)^m - a^m = a^m + mza^{m-1}\ldots. + z^m - a^m$$
$$= mza^{m-1}\ldots. + z^m.$$

Ce polynôme est évidemment divisible par z ou par $x-a$, comme on l'a déjà vu d'ailleurs (57).

176. *Remarque.* Si dans la formule de $(x+a)^m$ on fait $m=0$, le premier membre devient $(x+a)^0$ ou 1, et le second membre sera 1^0+1^0 ou 2. Ce résultat contradictoire vient de ce que le développement de $(x+a)^m$, qui doit avoir $m+1$ termes, n'en a plus qu'un seul lorsque $m=0$, et ce terme est 1.

Application aux puissances des binômes.

177. Lorsqu'on veut développer une certaine puissance d'un binôme quelconque, on facilite l'opération en développant d'abord la même puissance de $x+a$ ou de $x-a$, selon que le second terme du binôme proposé a le signe + ou le signe —, et en remplaçant ensuite les lettres x et a par leur valeur.

Soit à développer $(2x^3-3a^2b)^5$; on a d'abord

$$(x-a)^5=x^5-5ax^4+10a^2x^3-10a^3x^2+5a^4x-a^5.$$

Remplaçant x par $2x^3$ et a par $3a^2b$, il vient

$$(2x^3-3a^2b)^5=32x^{15}-240a^2bx^{12}+720a^4b^2x^9-1080a^6b^3x^6 \\ +810a^8b^4x^3-243a^{10}b^5.$$

178. On peut mettre la formule du binôme sous une forme plus simple qui en facilite l'application. A cet effet, on multiplie et on divise par x les deux termes du binôme $x+a$, ce qui donne

$$x+a=x\left(1+\frac{a}{x}\right);$$

en faisant alors $\frac{a}{x}=y$, on a

$$(x+a)^m=x^m(1+y)^m.$$

Or, si l'on remplace y par 1 et a par y dans la formule de $(x+a)^m$, il vient

$$(1+y)^m=1+\frac{m}{1}y+\frac{m(m-1)}{1.2}y^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}y^3+\ldots;$$

donc

$$(x+a)^m=x^m\left(1+\frac{m}{1}\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{a^2}{x^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{a^3}{x^3}+\ldots\right).$$

Pour calculer aisément cette formule, il faut d'abord former

la suite des fractions $\frac{m}{1}$, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$, $\frac{m-3}{4}$,.... multiplier la première par $\frac{a}{x}$, puis le résultat par $\frac{m-1}{2}\cdot\frac{a}{x}$, ce second résultat par $\frac{m-2}{3}\cdot\frac{a}{x}$, ainsi de suite, réunir tous ces termes, y ajouter l'unité, et multiplier le tout par x^m.

Application aux puissances des polynômes.

179. Si l'on veut former la puissance m^e du polynôme $a+b+c+d+$etc., on fait $b+c+d+$etc.$=p$, par exemple, et l'on a $(a+b+c+d+\text{etc.})^m=(a+p)^m$, dont le développement est donné par la formule ordinaire. Alors il faut substituer dans les m derniers termes à p sa valeur $b+c+d+$ etc.

Pour obtenir un terme quelconque, par exemple, le dernier p^m qui contient la plus haute puissance de p, on fait $c+d$ +etc.$=q$, et l'on a $(b+c+d+\text{etc.})^m=(b+q)^m$. On continue de même jusqu'à ce qu'on n'ait plus que la somme de deux termes à élever à la puissance m^e; il est facile de voir que si l'on effectue successivement toutes les substitutions nécessaires, le résultat définitif donnera le développement de $(a+b+c+d+\text{etc.})^m$.

Il suit de ce qui précède et du n° 171 (1°) que si le polynôme donné est homogène, sa puissance m^e sera également un polynôme homogène.

Racines des nombres. Principes sur les facteurs premiers et les diviseurs des nombres.

180. Nous avons donné dans l'Arithmétique (n° 100 à 130) les règles à suivre, soit pour extraire les racines carrée et cubique des nombres, soit pour approcher de la valeur des racines, lorsque les nombres proposés ne sont pas des carrés ou des cubes parfaits. Il est facile de voir que les mêmes raisonnements et les mêmes règles s'appliquent également à l'ex-

traction de la racine m^e des nombres : aussi nous nous bornerons à les rappeler rapidement.

La puissance m^e de 10, le plus petit nombre de 2 chiffres, est l'unité suivie de m zéros, et a par conséquent $m+1$ chiffres.

Ainsi lorsque le nombre donné a m chiffres au plus, sa racine m^e n'a qu'un seul chiffre; on cherchera donc s'il est la puissance m^e d'un des neuf premiers nombres, ou, dans le cas contraire, entre quelles puissances m^{es} consécutives il est contenu.

Lorsque le nombre donné a plus de m chiffres, sa racine m^e a des dizaines a et des unités b; or $(a+b)^m = a^m + mba^{m-1} +$ etc., et a^m ou la puissance m^e des dizaines doit être terminée par m zéros; donc les m premiers chiffres à droite du nombre proposé ne peuvent en faire partie, et on les séparera par une virgule. Si la partie restante à gauche contenait encore plus de m chiffres, sa racine m^e aurait de même des dizaines et des unités, ainsi de suite. On partagera donc le nombre proposé en tranches de m chiffres en allant de droite à gauche, et l'on extraira la racine m^e de la première tranche à gauche, ce qui donnera les dizaines de la racine ou a; retranchant a^m, et à côté du reste abaissant la tranche suivante, on divisera le tout par ma^{m-1}, ce qui donnera les unités b ou le chiffre suivant de la racine; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait abaissé toutes les tranches.

181. Quand l'indice de la racine à extraire peut se décomposer en facteurs premiers, on arrive plus simplement au résultat en extrayant successivement les racines de degrés marqués par ces facteurs.

Pour démontrer l'exactitude de ce procédé, il suffit de faire voir qu'on a

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

En effet, soit $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x$, on aura $\sqrt[n]{a} = x^m$, et, par suite, $a = x^{mn}$, d'où $\sqrt[mn]{a} = x$; l'équation ci-dessus a donc réellement lieu. Ainsi donc, au lieu d'extraire de a la racine du degré mn,

on peut prendre d'abord la racine m^e de a, et ensuite la racine n^e du résultat.

Voici plusieurs exercices de calcul :

$$\sqrt[4]{1296}=\sqrt{\sqrt{1296}}=6,$$
$$\sqrt[8]{6561}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{6561}}}=3,$$
$$\sqrt[9]{1953125}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{1953125}}=5.$$

182. Nous avons démontré dans l'Arithmétique (n°s 43 et 62) que *tout nombre premier, qui divise exactement le produit de deux facteurs, divise nécessairement l'un de ces facteurs.* D'où l'on a conclu (n°s 109 et 124) que le carré et le cube d'une fraction irréductible sont aussi des fractions irréductibles. Les raisonnements dont on a fait usage, étant indépendants des nombres pris pour exemple, s'appliquent également à des lettres représentant des nombres quelconques. Mais on peut encore généraliser le même principe en l'énonçant ainsi :

Théorème. *Tout nombre* n, *qui divise exactement un produit* ab *de deux facteurs, et qui est premier avec* a, *doit diviser* b.

En effet, soit $a>n$. En opérant sur les nombres a et n comme pour chercher leur plus grand commun diviseur, et désignant les quotients successifs par q, q', etc., les restes successifs par r, r', etc., on aura les égalités

$$a=nq+r,\ n=rq'+r',\ \text{etc.}$$

En multipliant les deux membres de chacune d'elles par b, et les divisant ensuite par n, il vient

$$\frac{ab}{n}=bq+\frac{rb}{n},\quad b=\frac{rb}{n}\cdot q+\frac{r'b}{n},\ \text{etc.}$$

Or, par hypothèse, $\frac{ab}{n}$ est entier; donc puisque bq est aussi entier, il faut que $\frac{rb}{n}$ le soit pareillement, c'est-à-dire que rb soit divisible par n. De la deuxième égalité on conclura de même que $\frac{r'b}{n}$ doit être entier ; ainsi de suite. Mais a et n étant premiers entre eux, l'un des restes successifs $r, r'\ldots\ldots$, est

nécessairement égal à l'unité. On aura donc une égalité; d'où l'on conclura que $\frac{b.1}{n}$ est entier, ou que b doit être divisible par n.

183. *Remarque* I. Il suit de là que

Tout nombre premier p, *qui divise un produit* abcd..... *de* m *nombres entiers, divise nécessairement un des facteurs.*

Car en considérant le produit donné comme composé des deux facteurs $a.bcd\ldots$, si p est premier avec a, il doit diviser le second facteur $bcd\ldots$; de même, s'il est premier avec b, il doit diviser $cd\ldots$, ainsi de suite. Enfin si p est premier avec les $m-1$ premiers facteurs, il doit diviser nécessairement le dernier.

184. *Remarque* II. Il résulte encore de là que

Tout nombre n *ne peut se décomposer que d'une seule manière en facteurs premiers.*

En effet, soit $n = abcd\ldots$, et soit, en outre, s'il est possible, $n = a'b'c'd'\ldots\ldots$, ces facteurs étant différents des premiers; on aura l'égalité $abcd\ldots = a'b'c'd'\ldots$, et par conséquent a' devant diviser le produit $abcd\ldots$ divisera l'un des facteurs. Mais comme ceux-ci sont premiers, il faut que a' égale l'un d'entre eux, a, par exemple. En divisant les deux produits par a on aura encore $bcd\ldots = b'c'd'\ldots$, et l'on prouvera de même que b' doit égaler l'un des facteurs du produit $bcd\ldots$, par exemple le facteur b; ainsi de suite. D'où il résulte que les facteurs des deux produits sont égaux chacun à chacun.

Les deux remarques précédentes peuvent aussi bien être regardées comme des théorèmes, ou comme des *corollaires*, nom que nous n'avons pas employé dans ces éléments d'Algèbre.

185. Quant à la manière de trouver les facteurs premiers et les diviseurs d'un nombre, nous renvoyons à notre Arithmétique (n° 44). Nous ajouterons seulement que si un nombre N, décomposé en facteurs premiers, a, b, c,... est $N = a^m b^n c^p\ldots$, tous ses diviseurs seront les différents termes du produit

$$(1+a+a^2\ldots.+a^m)\,(1+b+b^2\ldots.+b^n)\,(1+c+c^2\ldots.+c^p)\ldots..$$

En effet tous les diviseurs sont compris dans la formule $a^{m'}b^{n'}c^{p'}\ldots$

où les exposants m', n', p',... peuvent prendre toutes les valeurs depuis zéro jusques et y compris respectivement m, n, p...; en outre le nombre N ne peut avoir que les diviseurs indiqués, car autrement il se décomposerait de plusieurs manières en facteurs premiers. Le produit des deux premiers polynômes ayant un nombre de termes égal à $(m+1)(n+1)$, celui des trois premiers polynômes donnera $(m+1)(n+1)(p+1)$ termes, ainsi de suite. Le nombre total des termes sera donc

$$(m+1)(n+1)(p+1)\ldots\ldots$$

186. Revenons maintenant aux racines des nombres. Il résulte immédiatement du théorème précédent (182) que la *puissance* m^e *d'une fraction irréductible* $\frac{a}{b}$ *est une fraction* $\frac{a^m}{b^m}$ *également irréductible;* voyez d'ailleurs les raisonnements employés dans notre Arithmétique (n°s 109 et 124) pour le carré et le cube d'une telle fraction, et qui sont applicables ici. On conclut de là que si un nombre N n'a pas de racine m^e exacte en nombre entier, il n'en aura pas non plus en nombre fractionnaire. Car soit $\sqrt[m]{N}=\frac{a}{b}$, fraction qu'on peut toujours supposer réduite à la plus simple expression, on aurait alors $N=\frac{a^m}{b^m}$, c'est-à-dire un entier égal à une fraction irréductible, ce qui ne peut être. On dit alors que la racine m^e de N est *incommensurable ou irrationnelle* (Arith., n° 110).

187. Lorsqu'un nombre n'est pas une puissance m^e exacte, on approche de la vraie racine par les procédés détaillés dans notre Arithmétique (n°s 110, 111, 125, 128) pour les racines carrée et cubique.

D'abord on a vu (162) que $\sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}}=\frac{a}{b}$.

Si les deux termes de la fraction proposée, qu'on peut toujours supposer irréductible, sont des puissances exactes du degré m, la racine est commensurable. Mais elle est, au contraire, incommensurable quand les deux termes, ou seulement l'un des deux, ne sont pas des puissances m^{es} exactes. Alors, pour

connaître l'espèce de la fraction, on multiplie ses deux termes par un nombre tel que le dénominateur devienne une puissance m^e. Lorsque le dénominateur n'est pas un nombre premier, il faut le décomposer en ses facteurs premiers, et prendre, pour multiplier les deux termes de la fraction, le produit de ces facteurs premiers élevés à des puissances convenables, comme pour les racines carrées et cubiques (voy. notre Arith., nos 108 et 124, notes).

Maintenant, pour trouver la racine m^e du nombre entier N, à moins de la fraction $\frac{1}{k}$, on mettra N sous la forme $\frac{Nk^m}{k^m}$, et l'on aura

$$\sqrt[m]{N}=\frac{\sqrt[m]{Nk^m}}{k}.$$

Soit α la racine m^e de Nk^m à moins d'une unité, il est clair que la racine m^e de N sera comprise entre $\frac{\alpha}{k}$ et $\frac{\alpha+1}{k}$, et qu'ainsi $\frac{\alpha}{k}$ est la racine cherchée à moins de la fraction $\frac{1}{k}$. De là résulte la règle suivante :

RÈGLE GÉNÉRALE. *Pour avoir la racine m^e d'une quantité* N *à moins d'une certaine partie de l'unité représentée par* $\frac{1}{k}$, *il faut multiplier* N *par la puissance* m^e *du dénominateur* k *de la fraction indiquant le degré d'approximation, extraire à une unité près la racine* m^e *du produit, et la diviser par le dénominateur* k *de la même fraction.*

L'approximation des racines par les décimales, n'étant qu'un cas particulier du précédent, s'en déduit également comme nous l'avons vu en Arithmétique (nos 112 et 125) pour les racines carrées et cubiques, et mène à la règle suivante:

RÈGLE GÉNÉRALE. *Pour avoir en décimales la racine* m^e *approchée d'une quantité* N, *il faut la multiplier par l'unité suivie de* m *fois autant de zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine, extraire à une unité près la racine* m^e *de la quantité ainsi composée, et séparer vers la droite autant de chiffres que la racine doit avoir de chiffres décimaux.*

Voyez, pour les applications, les exemples des nos cités de notre Arithmétique.

188. Nous terminerons par indiquer un procédé commode pour obtenir des racines m^{es} très-approchées. Il consiste à partager le nombre donné N en deux parties, dont l'une a^m soit la puissance m^e immédiatement inférieure ou supérieure à ce nombre; de sorte qu'en désignant la différence par $\pm b$, on aura $N = a^m \pm b$. Soit $a \pm x$ la racine cherchée, x étant une petite quantité par rapport à la partie a; il vient alors

$$a^m \pm b = (a \pm x)^m,$$

d'où l'on tire $b = x(ma^{m-1} \pm \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}x + \text{etc.})$.

Mais x étant très-petit par rapport à a^{m-1}, on peut, dans une première approximation, négliger les termes qui suivent ma^{m-1}, ce qui donne $x = \frac{b}{ma^{m-1}}$. Si alors on substitue à x cette valeur dans les termes renfermés entre les parenthèses, en se bornant aux deux premiers, on obtient la valeur bien plus approchée

$$x = \frac{2ab}{2ma^m + (m-1)b}, \text{ d'où } \sqrt[m]{(a^m \pm b)} = a \pm \frac{2ab}{2ma^m \pm (m-1)b}.$$

Ainsi, dans le cas de $m = 2$, on a $\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{2ab}{4a^2 \pm b}$.

Ce procédé donne surtout une approximation rapide, en appliquant la formule plusieurs fois de suite. Par exemple, pour calculer $\sqrt{8}$, on remarque que 2,8 étant une valeur approchée de la racine, on peut faire $a = 2,8$, ce qui donne

$$a^2 = 7,84, \text{ et } b = 0,16.$$

Alors, par la formule, on a $\sqrt{8} = 2,8 + \frac{.896}{31520} = 2,82842$.

Pour approcher davantage on fait $a = 2,82842$, on calcule a^2, puis b, et l'on obtient la nouvelle racine plus approchée.

Racines des polynômes.

189. L'extraction de la racine m^e des polynômes se conclut,

comme celle des nombres qui ont des dizaines et des unités à la racine, de la manière dont est formée la puissance m^e de la racine. C'est pourquoi nous envisagerons seulement le cas général, comme pour la racine carrée des polynômes (131), et nous chercherons la marche à suivre pour revenir d'un polynôme P, puissance m^e d'un polynôme racine R, à cette racine.

Les deux polynômes P et R étant censés ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre x, supposons que a, b, c,... soient les termes inconnus du polynôme R, il est certain que la puissance m^e de $a+b+c+$ etc. devra reproduire tous les termes dont est composé le polynôme P. Or, il résulte de la composition de la puissance m^e de R, que le premier terme de P, ou celui qui contient x avec le plus haut exposant, est la puissance m^e du premier terme de R, lequel contient de même x avec le plus haut exposant. Donc, *on aura le premier terme* a *de la racine* R, *en extrayant la racine* m^e *du premier terme de* P.

En retranchant a^m de P, on aura un reste qui contiendra les autres parties de la puissance m^e de R. Or, on sait que le second terme de P ou le premier terme du reste, qui maintenant contient x avec le plus haut exposant, égale m fois le produit du premier terme a de la racine élevé à la puissance $m-1$ par le second terme b, ou celui qui, après a, contient x avec le plus haut exposant; donc, en divisant le premier terme du reste $P-a^m$ par ma^{m-1}, on aura le second terme b de la racine.

Si l'on retranche du reste $P-a^m$ la puissance m^e de $a+b$, moins le premier terme, ou bien, ce qui revient au même, si l'on retranche $(a+b)^m$ de P, on aura un second reste qui contiendra les autres parties de la puissance m^e de la racine; ce nouveau reste étant ordonné, son premier terme ou celui qui contient alors x avec le plus haut exposant, sera de même le produit de ma^{m-1} par le troisième terme c de la racine. Donc on aura ce terme c, en divisant le premier terme du second reste $P-(a+b)^m$ par ma^{m-1}; ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les termes du polynôme proposé,

dont le dernier doit être la puissance m^e du dernier terme de la racine.

Ce qui donne à ce procédé une grande généralité, c'est que si l'on connaît plusieurs termes successifs de la racine à partir du premier, il fournit immédiatement le terme suivant. Car soit s la somme des termes trouvés, t celle des termes à déterminer, on aura $P = (s+t)^m = s^m + mts^{m-1} +$ etc.

d'où $P - s^m = mts^{m-1} +$ etc.;

or, d'un côté, $P - s^m$ est le reste qu'on obtient après avoir retranché la puissance m^e des termes connus de la racine, et son premier terme est celui qui contient x avec le plus haut exposant; d'un autre côté, s^{m-1} ou $(a+b+\ldots\ldots)^{m-1}$ contient a^{m-1} dans son premier terme, et en le multipliant par m fois le premier terme de t, il est clair que le premier terme du produit sera celui de toute la suite $mts^{m-1} + \ldots\ldots$ qui contiendra x avec le plus haut exposant. Donc le premier terme du reste $P - s^m$ est le produit de m fois le premier terme de s^{m-1} par le premier terme de t; donc, en divisant le premier terme de $P - s^m$ par m fois le premier terme de ms^{m-1}, c'est-à-dire par ma^{m-1}, on est certain d'obtenir le premier terme de t, c'est-à-dire le terme suivant de la racine.

De là on peut conclure la règle suivante :

Règle générale. *Pour extraire la racine* m^e *d'un polynôme, il faut, après l'avoir ordonné, prendre la racine* m^e *du premier terme, ce qui donnera le premier terme* a *de la racine; retrancher du polynôme la puissance* m^e *de ce premier terme, et diviser le premier terme du reste par* ma^{m-1}, *ce qui donnera le second terme* b *de la racine; retrancher de* P *la puissance* m^e *de* a + b, *et diviser le premier terme du nouveau reste par* ma^{m-1}, *ce qui donnera le troisième terme de la racine; ainsi de suite.*

En outre, comme les restes diminuent successivement de degré par rapport à x, il est clair que la racine se trouvera ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x.

190. *Remarque.* 1° Lorsqu'en appliquant cette règle, on est conduit à un reste dont le premier terme n'est pas divi-

sible par m fois la puissance $m-1$ du premier terme de la racine, ou encore lorsqu'on est conduit par l'opération à mettre à la racine un terme d'un degré moins élevé que la racine m^e du dernier terme du polynôme proposé, il est certain que ce polynôme n'est pas une puissance m^e exacte.

On en serait seulement averti par la seconde des deux circonstances précédentes, si le polynôme avait été ordonné par rapport aux puissances croissantes d'une lettre, auquel cas la règle générale est également applicable.

2° Il résulte, en outre, de la nature des opérations qu'on vient d'indiquer pour l'extraction des racines, que si un polynôme est homogène, sa racine m^e sera également un polynôme homogène. On peut d'ailleurs le conclure de ce qui a été dit plus haut (179), savoir, que la puissance m^e d'un polynôme homogène est aussi un polynôme homogène.

SECTION II.

DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES.

---

§ 1er. *Forme et calcul des expressions imaginaires.*

191. Nous avons vu (127) que la racine carrée d'une quantité négative n'existe pas, et par suite s'appelle imaginaire. Il en est de même de toute quantité négative placée sous un radical de degré pair, comme $\sqrt[2m]{-a}$; car aucune quantité réelle, soit positive, soit négative, élevée à une puissance paire, ne peut donner un résultat négatif.

Ainsi, en général, *toute expression formée d'une quantité négative, placée sous un radical de degré pair, est une quantité imaginaire.*

Ces racines imaginaires peuvent, comme celles du second

degré (127), se décomposer en deux facteurs, dont l'un est réel et dont l'autre est une racine du même degré de -1. Car on a

$$\sqrt[2m]{-a}=\sqrt[2m]{a(-1)}=\sqrt[2m]{a}\sqrt[2m]{-1}.$$

Dans ce cas, on n'a plus qu'à considérer, dans le calcul, d'autre radical imaginaire que celui de -1.

Si maintenant on prend l'équation générale du second degré $x^2+px+q=0$ dont les racines sont données par la formule

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q},$$

on sait qu'elles sont imaginaires lorsqu'on a $\frac{1}{4}p^2<q$; or, si l'on fait, pour abréger, $-\frac{1}{2}p=a$, $\frac{1}{4}p^2-q=-b^2$, on aura

$$x=a\pm\sqrt{-b^2},$$

ou bien, d'après ce qu'on vient de voir,

$$x=a\pm b\sqrt{-1}.$$

Telle est la forme des racines imaginaires du second degré.

On appelle, en général, *expressions imaginaires*, celles qui ne sont susceptibles d'aucune valeur réelle, soit positive, soit négative, de sorte qu'elles ne servent, à proprément parler, qu'à indiquer des opérations non susceptibles d'être effectuées. Mais comme on a souvent besoin de les introduire dans le calcul, il est nécessaire de présenter quelques considérations à cet égard.

On a démontré (157) que la racine carrée de l'expression imaginaire $a+b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles, se présente sous la forme $A+B\sqrt{-1}$, A et B étant également des quantités réelles. Nous allons faire voir (192) qu'on obtient encore des résultats de la même forme en soumettant l'expression ci-dessus, soit aux quatre opérations fondamentales, soit à celles qui s'y ramènent, comme l'élévation aux puissances dans le cas de l'exposant entier positif ou négatif, soit même encore à des extractions de racines dont l'indice est une puissance de 2. En outre, nous verrons dans la théorie des équations qu'il en est encore de même lorsque ces expressions sont

soumises à des combinaisons quelconques. Nous réserverons donc à l'avenir la dénomination de *quantités imaginaires* aux seules expressions de la forme $a+b\sqrt{-1}$, qui sont les seules imaginaires employées dans les calculs algébriques.

Si $a=0$, l'expression $a+b\sqrt{-1}$ se réduit au seul terme imaginaire $b\sqrt{-1}$.

Si $b=0$, le terme $b\sqrt{-1}$ devenant nul, l'expression se réduit à la quantité réelle a. Par conséquent, *la formule* $x=a+b\sqrt{-1}$ *peut servir à représenter toutes les quantités, soit réelles, soit imaginaires.*

192. D'abord si l'on soumet les expressions imaginaires de la forme indiquée aux quatre opérations fondamentales, en appliquant les règles ordinaires, et observant que, d'après la signification du signe $\sqrt{}$, le produit $(\sqrt{-1})(\sqrt{-1})=(\sqrt{-1})^2=-1$, on a

1° $(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$,

2° $(a+b\sqrt{-1})-(c+d\sqrt{-1})=(a-c)+(b-d)\sqrt{-1}$,

3° $(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(bc+ad)\sqrt{-1}$,

4° $\dfrac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\dfrac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}$.

Quant à l'élévation aux puissances, si l'on suppose d'abord l'exposant entier positif, les puissances de l'expression $a+b\sqrt{-1}$ pourront s'obtenir, aussi bien que celles d'une quantité réelle, en multipliant successivement, et de proche en proche, cette expression par elle-même. Or, chaque multiplication donnant, comme on vient de le voir (3°), un produit partiel de la même forme, il en résulte que le produit total, c'est-à-dire la puissance m^e de $a+b\sqrt{-1}$ sera encore de la même forme; de sorte qu'on aura

$$(a+b\sqrt{-1})^m=A+B\sqrt{-1}.$$

Proposons-nous, comme application de ce principe, de former de proche en proche les puissances de $\sqrt{-1}$, qui nous seront utiles dans la suite : nous aurons, pour les quatre premières,

$$(\sqrt{-1})^1=+\sqrt{-1},\ (\sqrt{-1})^2=-1,\ (\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1},\ (\sqrt{-1})^4=+1.$$

Or, en continuant, il est facile de voir qu'on retrouverait

périodiquement ces quatre résultats; de sorte qu'en représentant par p un nombre entier positif quelconque, on peut renfermer toutes les puissances de $\sqrt{-1}$ dans les quatre formules suivantes :

$$(\sqrt{-1})^{4p}=[(\sqrt{-1})^4]^p=+1,\quad (\sqrt{-1})^{4p+1}=+\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^{4p+2}=-1,\quad (\sqrt{-1})^{4p+3}=-\sqrt{-1}.$$

Considérons maintenant le cas de l'exposant entier négatif. Comme on a en général $(a+b\sqrt{-1})^{-m}=\frac{1}{(a+b\sqrt{-1})^m}$, il est clair que l'on obtiendra le résultat cherché en divisant successivement, et de proche en proche, l'unité par $a+b\sqrt{-1}$. Or, le premier résultat partiel peut s'obtenir en faisant dans la formule 4°, $a=1, b=0, c=a, d=b$, ce qui donnera une expression de la même forme. En divisant ce premier résultat par $a+b\sqrt{-1}$, on aura encore, comme on l'a vu (4°), un résultat de la même forme; par conséquent il en sera de même du résultat définitif, de sorte qu'on aura

$$\frac{1}{(a+b\sqrt{-1})^m}=(a+b\sqrt{-1})^{-m}=A+B\sqrt{-1}.$$

Donc, en général, m étant un nombre entier positif ou négatif, on a

5° $$(a+b\sqrt{-1})^m=A+B\sqrt{-1}.$$

Passant enfin aux extractions de racines dont l'indice est une puissance exacte de 2, en posant $\sqrt[2^k]{a+b\sqrt{-1}}=x$, on aura

$$x^{2^k}=a+b\sqrt{-1},\quad \text{ou}\quad (x^{2^{k-1}})^2=a+b\sqrt{-1},$$

d'où $$x^{2^{k-1}}=\sqrt{a+b\sqrt{-1}}.$$

Mais on a vu (157) que la racine carrée de $a+b\sqrt{-1}$ est une expression de la même forme $m+n\sqrt{-1}$; on aura donc

$$x^{2^{k-1}}=m+n\sqrt{-1}.$$

Opérant sur cette équation comme on a opéré sur la première, on aura de même $x^{2^{k-2}}=m'+n'\sqrt{-1}$, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière extraction de racine carrée. Donc,

6° $$\sqrt[2^k]{a+b\sqrt{-1}}=A+B\sqrt{-1}.$$

2° *Si deux expressions imaginaires sont égales, leurs modules sont égaux.*

En effet, on ne peut avoir $a+b\sqrt{-1}=c+d\sqrt{-1}$, sans qu'on ait en même temps

$$a=c \quad \text{et} \quad b=d, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{c^2+d^2}.$$

Mais la réciproque n'est pas vraie.

On voit, en outre, qu'une équation entre deux expressions imaginaires est la représentation symbolique de deux équations entre des quantités réelles.

195. Pour terminer ce qui est relatif aux expressions imaginaires, nous allons démontrer plusieurs théorèmes qui nous seront fort utiles dans la suite, et surtout dans la théorie des équations.

Théorème i. *La somme (ou la différence) de deux quantités quelconques réelles ou imaginaires a un module compris entre la somme et la différence de leurs modules.*

Soient m et m' les modules des deux expressions

$$a+b\sqrt{-1}, \quad a'+b'\sqrt{-1},$$

et M le module de leur somme; on a

$$m^2=a^2+b^2, \quad m'^2=a'^2+b'^2,$$

et $M^2=(a+a')^2+(b+b')^2=a^2+a'^2+b^2+b'^2+2(aa'+bb')$
$=m^2 \pm m'^2+2(aa'+bb')$.

Or $m^2m'^2=(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=(aa'+bb')^2+(ab'-ba')^2$.

Donc $aa'+bb'$ est $<mm'$ ou tout au plus égal à mm'. Par conséquent M^2 est compris entre $m^2+m'^2+2mm'$ ou bien $(m+m')^2$ et $m^2+m'^2-2mm$ ou bien $(m-m')^2$.

Ainsi le module M est compris entre la somme et la différence des modules m et m'.

Si l'on prend la différence des expressions imaginaires, la démonstration est la même.

196. Théorème ii. *Le produit de deux quantités quelconques, réelles ou imaginaires, a pour module le produit des modules de ces quantités.*

En effet,

$$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})=aa'-bb'+(ab'+ba')\sqrt{-1}.$$

Or le module du produit est

$$\sqrt{(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2}=\sqrt{a^2a'^2+b^2b'^2+a^2b'^2+b^2a'^2}$$
$$=\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)},$$ qui est le produit des modules.

Remarque I. Il suit de là que le produit d'un nombre quelconque de facteurs a pour module le produit des modules de tous les facteurs, et que par conséquent la puissance m^e d'une quantité de la forme $a+b\sqrt{-1}$ a pour module la puissance m^e de $\sqrt{a^2+b^2}$.

Remarque II. Il suit encore de là que réciproquement

Le module du quotient de deux expressions imaginaires est égal au quotient des modules du dividende et du diviseur.

Ou bien, *le module d'une fraction imaginaire égale le quotient des modules du numérateur et du dénominateur.*

197. Théorème III. *Un produit de facteurs quelconques, réels ou imaginaires, ne peut être nul, à moins qu'un des facteurs ne soit nul.*

La proposition est évidente d'elle-même, lorsque tous les facteurs sont réels, mais ne l'est plus lorsque le produit peut renfermer des facteurs imaginaires; car rien ne fait voir *à priori* que les termes du produit ne puissent se détruire entre eux, sans qu'un des facteurs soit nul. Or, pour qu'un produit soit nul, il faut que son module, qui est égal au produit des modules des facteurs (196), le soit pareillement (194, 1°); et comme ces modules sont tous des quantités nécessairement réelles, leur produit ne peut être nul, à moins que l'un d'entre eux ne soit nul. Donc, *pour qu'un produit de facteurs réels ou imaginaires soit nul, il faut et il suffit qu'un des facteurs soit nul.*

198. Nous allons maintenant considérer les expressions imaginaires conjuguées, et faire voir qu'en les soumettant aux opérations détaillées plus haut (192), on obtient, dans tous les cas, des résultats conjugués : ensuite nous déduirons de là deux théorèmes très-remarquables.

Si l'on soumet d'abord aux quatre opérations fondamentales deux expressions imaginaires et les deux expressions conjuguées, on aura (192)

$$1^\circ \quad (a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1},$$
$$(a-b\sqrt{-1})+(c-d\sqrt{-1})=(a+c)-(b+d)\sqrt{-1};$$

$$2^\circ \quad (a+b\sqrt{-1})-(c+d\sqrt{-1})=(a-c)+(b-d)\sqrt{-1},$$
$$(a-b\sqrt{-1})-(c-d\sqrt{-1})=(a-c)-(b-d)\sqrt{-1};$$

$$3^\circ \quad (a+b\sqrt{-1})\,(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(bc+ad)\sqrt{-1},$$
$$(a-b\sqrt{-1})\,(c-d\sqrt{-1})=(ac-bd)-(bc+ad)\sqrt{-1};$$

$$4^\circ \quad \frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1},$$
$$\frac{a-b\sqrt{-1}}{c-d\sqrt{-1}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}.$$

Si l'on passe à l'élévation aux puissances, d'abord dans le cas de l'exposant entier positif, et que, pour opérer de proche en proche, on multiplie l'expression $a+b\sqrt{-1}$ par elle-même, et sa conjuguée $a-b\sqrt{-1}$ par elle-même, il est clair que cette première opération donnera (3°) deux résultats partiels conjugués.

En multipliant chacun de ces deux premiers résultats par l'expression imaginaire correspondante, on aura de même (3°) deux nouveaux résultats partiels conjugués, et ainsi de suite, quel que soit le nombre d'opérations à effectuer. D'où l'on conclut que les deux résultats définitifs seront également conjugués.

En prenant le cas de l'exposant entier négatif, on aura les deux expressions conjuguées $\frac{1}{(a+b\sqrt{-1})^m}$, $\frac{1}{(a-b\sqrt{-1})^m}$.

Or, si l'on divise l'unité par $a+b\sqrt{-1}$ et par $a-b\sqrt{-1}$, on aura (4°) deux résultats partiels conjugués. En divisant chacun de ces deux premiers résultats par l'expression correspondante, on aura de même deux nouveaux résultats partiels conjugués; ainsi de suite. Donc les deux résultats définitifs seront aussi conjugués.

Par conséquent, m étant un nombre entier positif ou négatif, on aura

$$5^\circ \quad (a+b\sqrt{-1})^m=\text{A}+\text{B}\sqrt{-1},$$
$$(a-b\sqrt{-1})^m=\text{A}-\text{B}\sqrt{-1}.$$

Passons enfin aux extractions de racines dont l'indice est une puissance exacte de 2. Comme

$$\sqrt[2^k]{a+b\sqrt{-1}}=A+B\sqrt{-1} \quad (192, 6^o),$$

et que d'ailleurs, d'après ce qui a été démontré plus haut (157), on a $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=a'+b'\sqrt{-1}$, $\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=a'-b'\sqrt{-1}$, il est clair qu'on aura de même

$$\sqrt{a'+b'\sqrt{-1}}=a''+b''\sqrt{-1},\ \sqrt{a'-b'\sqrt{-1}}=a''-b''\sqrt{-1};$$

ainsi de suite. De sorte qu'en prenant la racine carrée de deux résultats partiels correspondants, on aura toujours deux nouveaux résultats partiels conjugués. Il en sera donc de même des deux résultats définitifs. Par conséquent on aura

$$6^o \qquad \sqrt[2^k]{a+b\sqrt{-1}}=A+B\sqrt{-1},$$
$$\sqrt[2^k]{a-b\sqrt{-1}}=A-B\sqrt{-1}.$$

199. De là résulte immédiatement le théorème suivant :

Théorème IV. *Étant donné un polynôme de la forme*

$$Ax^m+Bx^n+Cx^p+\ldots\ldots$$

dans lequel les exposants m, n, p,... *sont des nombres entiers positifs ou négatifs, et les lettres* x, A, B, C,... *des quantités réelles ou imaginaires, si l'on remplace dans ce polynôme les quantités* x, A, B, C,..... *par leurs conjuguées* x', A', B', C'....., *on aura un nouveau polynôme* $A'x'^m+B'x'^n+C'x'^p+\ldots\ldots$ *qui sera conjugué du premier.*

Car chacune des opérations indiquées dans le premier polynôme sur deux quelconques des quantités x, A, B, C....., sera évidemment indiquée dans le second polynôme sur les deux expressions conjuguées des deux premières.

Or le premier polynôme peut se réduire (193, 1°) à la forme $P+Q\sqrt{-1}$; donc le second polynôme sera $P-Q\sqrt{-1}$.

200. On peut encore conclure de ce qui précède le théorème suivant qui est bien plus général :

Théorème V. *Si l'on effectue un système quelconque d'opéra-*

tions, pouvant se ramener aux quatre fondamentales, sur des quantités de la forme $a+b\sqrt{-1}$, *puis le même système d'opérations sur les quantités conjuguées des premières, on obtiendra deux résultats dont le second sera conjugué du premier.*

Car on a vu (193, 2°) que si l'on effectue un système quelconque des opérations indiquées sur un nombre quelconque de quantités de la forme $a+b\sqrt{-1}$, le résultat définitif est également de la même forme $P+Q\sqrt{-1}$.

Mais si, dans l'ensemble des expressions données, on remplace chacune d'elles par sa conjuguée, et qu'on effectue sur toutes ces quantités conjuguées des premières le même système d'opérations que dans le premier cas, il suit de ce qui précède (198) que la première opération effectuée sur les deux premières conjuguées donnera un résultat partiel conjugué du premier résultat partiel correspondant. Par la même raison, la seconde opération donnera un nouveau résultat partiel conjugué du second résultat partiel correspondant; ainsi de suite. Donc le second résultat définitif sera également conjugué du premier résultat définitif, et, par conséquent, égal à $P-Q\sqrt{-1}$.

SECTION III.

CALCUL DES RADICAUX ARITHMÉTIQUES ET DES EXPOSANTS FRACTIONNAIRES.

---

§ 1er. *Calcul des radicaux arithmétiques.*

201. Nous avons vu (126) que toute quantité réelle et positive a deux racines carrées réelles, égales et de signes contraires, dont par conséquent *une seule est réelle et positive.*

De même, toute quantité réelle et positive A, soumise à une extraction de racine de degré m, admet plusieurs racines m^{es}

dont nous préciserons le nombre plus tard (210); mais parmi ces racines *une seule est réelle et positive*. D'abord il en existe toujours une de cette sorte dans le cas indiqué, puisque les procédés arithmétiques permettent alors d'obtenir, exactement ou par approximation, une quantité positive a dont la puissance m^e reproduit A. En outre, il n'en existe qu'une seule, car toute quantité réelle et positive plus grande ou plus petite que a, étant élevée à la puissance m^e, donnerait un résultat plus grand ou plus petit que A. La racine réelle et positive, étant fournie par les calculs arithmétiques, a reçu, pour cette raison, le nom particulier de *racine arithmétique*, ou de *valeur arithmétique de la racine*; on l'appelle encore *valeur arithmétique du radical*, lorsque la racine est indiquée, comme à l'ordinaire, par ce signe. Le radical lui-même, considéré par rapport à cette racine, est appelé *radical arithmétique*.

Les autres racines, soit réelles et négatives, soit imaginaires, s'appellent par opposition *racines algébriques*, ou *valeurs algébriques de la racine*. Lorsque la racine est indiquée par un radical, les racines algébriques sont dites *les valeurs algébriques du radical*, et le radical lui-même, considéré dans toute sa généralité, se nomme *radical algébrique*.

Lorsque la quantité proposée A est négative, il est évident qu'elle ne peut avoir de racine réelle et positive, dont toutes les puissances ne peuvent être que positives; et si la quantité A est imaginaire, elle ne peut avoir de racine réelle, soit positive, soit négative, dont toutes les puissances ne peuvent être que des quantités réelles.

Dans ces deux cas, le radical n'aura que des valeurs algébriques, qui seront en outre imaginaires dans le second.

202. Passons maintenant au calcul des radicaux considérés sous le point de vue de leur valeur arithmétique, et démontrons d'abord les deux principes suivants, sur lesquels se fondent les transformations qu'on peut avoir à leur faire subir.

1° *La racine de toute quantité élevée à la puissance du même degré que le radical sous lequel cette quantité est placée, peut se mettre en facteur hors du radical;* et réciproquement, *tout*

facteur placé devant le radical peut se mettre sous le radical en l'élevant à la puissance marquée par l'indice.

Car, d'après ce que nous avons vu plus haut (161 et 163), on a, en général,

$$\sqrt[m]{a^m b^{m+2} c} = \sqrt[m]{a^m b^m . b^2 c} = \sqrt[m]{a^m b^m} . \sqrt[m]{b^2 c} = ab\sqrt[m]{b^2 c}.$$

2° *Un radical ne change pas de valeur, lorsqu'on multiplie (ou qu'on divise) son indice par un nombre quelconque, et qu'en même temps on élève la quantité sous le radical à la puissance marquée par ce nombre (ou qu'on en extrait la racine de même degré).*

Car nous avons fait voir (181) qu'on a, en général,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}} = \sqrt[mn]{a^n}.$$

Or $\sqrt[n]{a^n} = a$, donc $\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}$. Ce qui démontre le principe énoncé.

Il suit de là que, *pour réduire au même indice un nombre quelconque de radicaux, il faut multiplier successivement l'indice de chaque radical par le produit des autres indices, et élever en même temps la quantité sous le radical à la puissance marquée par ce produit.*

Ainsi les radicaux d'indices différents, $\sqrt[m]{a}, \sqrt[n]{b}, \sqrt[p]{c}$, peuvent se transformer en ceux-ci de même indice :

$$\sqrt[mnp]{a^{np}}, \quad \sqrt[mnp]{b^{mp}}, \quad \sqrt[mnp]{c^{mn}}.$$

Ce procédé, tout à fait analogue à celui qu'on a indiqué (59, 2°) pour la réduction des fractions au même dénominateur, est susceptible de la même simplification. On voit en effet que si tous les indices ne sont pas premiers entre eux, *on pourra les décomposer en leurs facteurs premiers, chercher leur plus petit commun dividende, le diviser par tous les indices, et enfin élever successivement les quantités placées sous le radical aux puissances marquées par les quotients respectifs, en prenant le plus petit commun dividende pour indice commun de tous les radicaux.*

Soient, par exemple, les radicaux

$$\sqrt[24]{a},\quad \sqrt[18]{b},\quad \sqrt[5]{c};$$

le plus petit commun dividende des nombres 24, 18 et 5 étant 360, dont les quotients respectifs par 24, 18 et 5 sont 15, 20 et 72, les radicaux proposés deviennent par la transformation indiquée

$$\sqrt[360]{a^{15}},\quad \sqrt[360]{b^{20}},\quad \sqrt[360]{c^{72}}.$$

203. Cela posé, le calcul des radicaux arithmétiques n'offre aucune difficulté.

Addition et soustraction. Si l'on veut ajouter ou soustraire des radicaux qui sont semblables, soit immédiatement, soit après avoir effectué, s'il y a lieu, la transformation indiquée tout à l'heure (202, 1°), on prend la somme ou la différence des coefficients ou termes en dehors des radicaux, et on la multiplie par le radical commun.

Par exemple, si l'on veut ajouter les deux radicaux

$$\sqrt[4]{3a^5b^{11}},\quad 2a^3\sqrt[4]{243ab^7},$$

et de la somme retrancher $\frac{5c}{3d}\sqrt[4]{7203a^9b^{15}}$,

on écrira $\sqrt[4]{3a^5b^{11}}+2a^3\sqrt[4]{243ab^7}-\frac{5c}{3d}\sqrt[4]{7203a^9b^{15}}$.

Or, $\sqrt[4]{3a^5b^{11}}=\sqrt[4]{3ab^3\,.\,a^4b^8}=ab^2\sqrt[4]{3ab^3}$;

de même $2a^3\sqrt[4]{243ab^7}=6a^3b\sqrt[4]{3ab^3}$;

et $\frac{5c}{3d}\sqrt[4]{7203a^9b^{15}}=\frac{35ca^2b^3}{3d}\sqrt[4]{3ab^3}$.

Donc on a pour le résultat demandé

$$\left(ab^2+6a^3b-\frac{35a^2b^3c}{3d}\right)\sqrt[4]{3ab^3}.$$

Lorsque les radicaux ne sont pas semblables, et ne peuvent d'ailleurs le devenir, on se borne à les écrire à la suite l'un de l'autre, en se conformant à la règle des signes.

204. *Multiplication.* Le produit de deux ou plusieurs radicaux de même indice se ramène à un seul radical.

Car soit le produit $\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}$, dont la puissance m^e est abc; il est clair que ce produit est égal à $\sqrt[m]{abc}$. Donc

$$\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{abc}.$$

Si les radicaux n'ont pas le même indice, il faut les ramener à un indice commun, d'après la règle prescrite plus haut (202, 2°); alors on opère comme on vient de l'indiquer.

De là on conclut la règle suivante :

Règle générale. *Pour faire le produit de plusieurs radicaux d'un degré quelconque, on les ramène à un indice commun, s'ils ne l'ont déjà, on multiplie entre elles les quantités placées sous les radicaux, et l'on affecte ce produit du radical commun.*

205. *Division.* Le quotient de deux radicaux de même indice se ramène également à un seul radical.

Car, d'après la règle donnée (162) pour former les puissances d'une fraction, on a

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m=\frac{a}{b}.$$

Prenant la racine m^e il vient $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}.$

Si les radicaux ont des indices différents, on les ramène à un indice commun, et l'on rentre dans le cas précédent.

De là, on conclut la règle suivante :

Règle générale. *Pour diviser deux radicaux l'un par l'autre, on les ramène à un indice commun, s'ils ne l'ont déjà, on divise l'une par l'autre les quantités placées sous les radicaux, et l'on affecte le quotient du radical commun.*

206. *Élévation aux puissances.* La règle pour élever un radical à une puissance se déduit de celle qu'on a donnée (204) pour la multiplication des radicaux, en supposant les facteurs égaux.

Car si l'on a n facteurs égaux à $\sqrt[m]{a}$, il viendra

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{a}\ldots\ldots \text{ répété } n \text{ fois }=\sqrt[m]{a^n}$$

Mais si l'indice du radical est divisible par l'exposant de la puissance, par exemple, si l'on a $\sqrt[mn]{a}$ à élever à la puissance n, comme $\sqrt[mn]{a^n}=\sqrt[m]{a}$ d'après ce qu'on a vu (202, 2°), il est clair qu'on aura $\left(\sqrt[mn]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a}$.

De là résulte la règle suivante :

Règle générale. *Pour élever un radical à une puissance, il faut élever à cette puissance la quantité sous le radical, ou bien diviser l'indice du radical par l'exposant de la puissance, lorsque cette division est possible.*

Si l'indice et la puissance ont seulement un facteur commun, on peut le supprimer ; alors il ne faut élever la quantité placée sous le radical qu'à la puissance marquée par le second facteur de la puissance donnée.

207. *Extraction des racines.* La règle à suivre pour l'extraction des racines peut se déduire de celle qu'on vient de prescrire pour l'élévation aux puissances, puisque cette seconde opération est exactement inverse de la première.

Ainsi $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}}=\sqrt[m]{a}$ et $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

Car, d'après la règle précédente, on a également

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a^n} \quad \text{et} \quad \left(\sqrt[mn]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a}.$$

De là on tire la règle suivante :

Règle générale. *Pour extraire la racine d'un radical, il faut extraire celle de la quantité sous le radical, ou bien multiplier l'indice du radical par le degré de la racine à extraire.*

§ 2. *Calcul des exposants fractionnaires.*

208. Les exposants fractionnaires provenant des extractions de racines (164), les règles relatives à ces exposants doivent se conclure de celles qu'on a données pour le calcul des

radicaux, dont ils ne font que tenir la place. Effectuant cette transformation pour la multiplication, la division, l'élévation aux puissances, et l'extraction de racines, les règles citées donnent immédiatement

$$1^\circ \quad a^m . a^{\frac{p}{q}} = a^m . \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{mq+p}} = a^{\frac{mq+p}{q}} = a^{m+\frac{p}{q}}.$$

$$a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} . \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} . \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$$
$$= a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

$$2^\circ \quad \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

$$3^\circ \quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{n}}.$$

$$4^\circ \quad (a^m)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^m)^p} = \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{q}}.$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[p]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}}.$$

$$\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{mp}{nq}}.$$

On voit, par les résultats, que les règles relatives aux exposants fractionnaires sont exactement les mêmes que celles qu'on a données plus haut pour les exposants entiers.

En outre, la division pouvant conduire, dans ce cas, à des exposants fractionnaires négatifs, on peut leur appliquer les mêmes considérations qu'aux exposants entiers négatifs (45), de sorte qu'on aura toujours $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, n étant un nombre entier ou fractionnaire. Par conséquent le calcul des exposants entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, sera soumis à des règles absolument identiques.

Soit, par exemple, $(a^{-p})^{-\frac{m}{n}}$, on aura

$$(a^{-p})^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(a^{-p})^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\frac{1}{(a^p)^{\frac{m}{n}}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{\frac{pm}{n}}}} = a^{\frac{pm}{n}} = a^{(-p)\left(-\frac{m}{n}\right)}.$$

De même

$$\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{-\frac{m}{n}}} = \sqrt[\frac{p}{q}]{\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}} = \frac{1}{\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{m}{n}}}} = \frac{1}{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{mq}{pn}}} = a^{-\frac{mq}{pn}} = a^{\left(-\frac{m}{n}\right)\frac{q}{p}}.$$

Enfin, si l'on a $\sqrt[-\frac{p}{q}]{a^{-\frac{m}{n}}}$, en représentant la racine par x, il vient

$$x = \sqrt[-\frac{p}{q}]{a^{-\frac{m}{n}}},$$

d'où l'on tire $x^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}}$, ou bien $\frac{1}{x^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$, ou encore

$$x^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Élevant les deux membres à la puissance $\frac{q}{p}$, on obtient

$$x = a^{\frac{mq}{np}} = a^{\left(-\frac{m}{n}\right)\left(-\frac{q}{p}\right)}.$$

209. *Remarque.* Si dans l'identité $\sqrt[\frac{p}{q}]{a} = a^{\frac{q}{p}}$ on fait $q=0$, on aura $\sqrt[\frac{p}{0}]{a} = a^{\frac{0}{p}} = a^0 = 1$. D'où il résulte que l'unité est la limite des racines dont l'indice croît continuellement, la racine atteignant cette limite lorsque l'indice devient infini.

Si l'on fait $p=0$, on a $\sqrt[0]{a} = a^{\frac{p}{0}}$; d'où il suit que l'infini est la limite des racines dont l'exposant décroît continuellement, la racine atteignant cette limite lorsque l'indice devient nul.

Si l'on a $p=q$, il vient $\sqrt[\frac{p}{q}]{a} = a^{\frac{q}{p}} = a$. Par conséquent, si l'on passe progressivement de l'indice 1 à l'indice zéro, ou à

l'indice infini, la racine croît progressivement depuis la quantité donnée sous le radical jusqu'à l'infini, ou décroit depuis cette quantité jusqu'à zéro.

Si les indices, ou de même les exposants, sont incommensurables, on peut les supposer remplacés par des quantités commensurables s'approchant de plus en plus d'être égales à la quantité incommensurable, et toutes les règles précédentes sont alors applicables.

Ainsi la valeur des expressions affectées de signes radicaux, ou d'exposants, tendra sans cesse vers la valeur qu'elle doit atteindre à cette limite, et l'atteindra réellement lorsque l'indice du radical, ou l'exposant, deviendra incommensurable. Par conséquent m et n étant incommensurables, on aura toujours

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

SECTION IV.

DES RADICAUX ALGÉBRIQUES.

---

§ 1er. *Valeurs multiples des radicaux algébriques.*

210. Dans les articles précédents, nous n'avons envisagé les radicaux que sous le point de vue particulier de leur valeur arithmétique. Nous allons maintenant les prendre dans toute leur généralité, et considérer leurs valeurs algébriques (201).

Soit à extraire la racine m^e d'une quantité quelconque A; en nommant x la racine, on aura $x = \sqrt[m]{A}$, d'où $x^m = A$, et $x^m - A = o$.

L'extraction de la racine m^e d'une quantité revient donc à la résolution d'une telle équation du degré m. Car, puisque $\sqrt[m]{A}$

représente indifféremment toutes les quantités réelles ou imaginaires dont la puissance m^e reproduit la quantité A, il est clair que ces quantités ne sont autres que les valeurs de x vérifiant l'équation $x^m = A$. Mais nous démontrerons plus tard (284), ce que nous ne pouvons encore faire ici, que toute équation du degré m a m solutions différentes et ne peut en admettre davantage. Par conséquent, le radical $\sqrt[m]{A}$ a toujours, et ni plus ni moins, m valeurs différentes.

Nous allons vérifier ce principe sur quelques cas particuliers.

211. D'abord on a vu (126) que toute quantité a deux racines carrées égales et de signes contraires, et ne peut en admettre davantage; il en est donc de même de tout radical dont l'indice est 2.

Soit maintenant le radical $\sqrt[3]{A}$, A étant une quantité quelconque. Toutes les valeurs de $\sqrt[3]{A}$ seront fournies (210) par les solutions de l'équation $x^3 - A = 0$. Soit a une racine cubique quelconque de A; on aura $a^3 = A$, et l'équation précédente deviendra $x^3 - a^3 = 0$. Or (57) le binôme $x^3 - a^3$ est divisible par $x - a$, et l'on a

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2).$$

Donc l'équation $x^3 - a^3 = 0$ revient à $(x - a)(x^2 + ax + a^2) = 0$, qui, n'étant qu'une transformation de la première, a nécessairement les mêmes solutions. Mais pour qu'un produit de facteurs réels ou imaginaires soit nul, il faut et il suffit qu'un des facteurs devienne nul (197). Donc toutes les solutions de l'équation $x^3 - a^3 = 0$ seront fournies par les deux équations $x - a = 0$, d'où $x = a$, et $x^2 + ax + a^2 = 0$, d'où $x = a\dfrac{(-1 \pm \sqrt{-3})}{2}$.

Donc en admettant qu'une quantité quelconque A ait a pour racine cubique, elle aura nécessairement les trois racines cubiques

$$a,\quad a\frac{(-1 + \sqrt{-3})}{2},\quad a\frac{(-1 - \sqrt{-3})}{2},$$

ou bien a, $a\frac{(-1+\sqrt{3}\sqrt{-1})}{2}$, $a\frac{(-1-\sqrt{3}\sqrt{-1})}{2}$.

Si la quantité A est réelle, on pourra toujours par les procédés arithmétiques obtenir sa racine cubique exacte ou approchée, qui devra être de même signe. Donc toute quantité réelle a trois racines cubiques dont une réelle et deux imaginaires.

Si la quantité A est imaginaire, en admettant ce qui sera démontré plus loin (280), que toute équation a au moins une racine, l'équation $x^3-A=0$ aura donc au moins une racine a, et dès lors il suit de ce qui précède que $\sqrt[3]{A}$ aura trois valeurs.

Donc tout radical dont l'indice est 3 a toujours, ni plus ni moins, un nombre de valeurs égal à 3.

Si l'on fait $A=1$, on aura aussi $a=1$; donc les trois valeurs de $\sqrt[3]{1}$ sont

$$1,\quad \frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},\quad \frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}.$$

On peut s'exercer à vérifier que les deux racines cubiques imaginaires de l'unité ont 1 pour cube; ce qui fera reconnaître, en outre, qu'elles sont le carré l'une de l'autre. De sorte qu'en représentant l'une d'elles par α, les trois racines cubiques de 1 seront 1, α, α^2.

De plus, il est facile de voir qu'en multipliant les trois racines cubiques de 1 par l'une quelconque des trois valeurs de $\sqrt[3]{A}$, on retrouve précisément ces trois valeurs, de sorte que les trois valeurs de $\sqrt[3]{A}$ seront a, $a\alpha$, $a\alpha^2$.

Donc *on obtient les trois racines cubiques d'une quantité quelconque, en multipliant l'une d'entre elles par les trois racines cubiques de l'unité.*

Passons au radical $\sqrt[4]{A}$. Soit a l'une quelconque de ses valeurs, qui doivent être toutes fournies par l'équation $x^4-A=0$; celle-ci deviendra $x^4-a^4=0$, ou $(x^2-a^2)(x^2+a^2)=0$, qu'on ne peut satisfaire qu'on posant $x^2-a^2=0$, d'où $x=\pm a$,

ou bien $x^2 + a^2 = 0$, d'où $x = \pm\sqrt{-a^2} = \pm a\sqrt{-1}$.

Donc le radical $\sqrt[4]{A}$ a les quatre valeurs

$$+a, \quad -a, \quad +a\sqrt{-1}, \quad -a\sqrt{-1}.$$

Si A est réel et positif, il y aura 4 racines deux à deux égales et de signes contraires, dont 2 réelles et 2 imaginaires.

Si A est imaginaire, il y aura, d'après le principe admis tout à l'heure, 4 racines imaginaires, deux à deux égales et de signes contraires.

Donc tout radical, dont l'indice est 4, a toujours, ni plus ni moins, un nombre de valeurs égal à 4.

Si $A = 1$, on a aussi $a = 1$; donc les 4 valeurs de $\sqrt[4]{1}$ sont

$$+1, \quad -1, \quad +\sqrt{-1}, \quad -\sqrt{-1}.$$

Or, en les multipliant par l'une quelconque des quatre valeurs de $\sqrt[4]{A}$, on retrouve précisément ces quatre valeurs.

Donc *on obtient les quatre racines quatrièmes d'une quantité quelconque, en multipliant l'une d'entre elles par les quatre racines quatrièmes de l'unité.*

212. Ces considérations peuvent s'appliquer immédiatement à tous les radicaux dont l'indice est une puissance quelconque de 2 ou de 3, ou même est formé des seuls facteurs 2 et 3. Car prenons pour exemple le radical $\sqrt[6]{A}$; comme $6 = 2.3$, et que chacune des valeurs a, $a\alpha$, $a\alpha^2$ de $\sqrt[3]{a}$, a deux racines carrées, on aura en tout six valeurs différentes pour le radical $\sqrt[6]{A}$ qui ne pourra d'ailleurs en avoir d'autres. En outre, comme $\alpha^3 = 1$ et que par conséquent $\alpha^4 = \alpha$, ces six valeurs seront

$$\pm\sqrt{a}, \quad \pm\alpha\sqrt{a}, \quad \pm\alpha^2\sqrt{a}.$$

Au reste, on peut prouver *à priori* que le radical $\sqrt[2^h]{A}$, où h est un nombre entier quelconque et A une quantité quelconque, a 2^h valeurs de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Car les valeurs de $\sqrt[2^h]{A}$ seront fournies par l'équation

$x^{2^k} = A$ qu'on peut mettre sous la forme $(x^{2^{k-1}})^2 = A$. Or celle-ci donnera deux valeurs du degré $x^{2^{k-1}}$; de même chacune de ces dernières en donnera deux du degré $x^{2^{k-2}}$; ainsi de suite. De sorte qu'on aura en tout 2^k valeurs, qui seront toutes de la forme $a + b\sqrt{-1}$ (198, 6°).

En outre, il sera démontré que toutes ces valeurs sont différentes, si l'on fait voir qu'en supposant différentes deux valeurs telles que $a + b\sqrt{-1}$, $a' + b'\sqrt{-1}$, satisfaisant à une équation $x^{2^{k-1}} = A$, les valeurs correspondantes fournies par l'équation voisine $x^{2^k} = A$ seront également différentes. Or, deux de celles-ci s'obtiennent en prenant la racine carrée de $a + b\sqrt{-1}$ qui donne deux résultats différents (157); et il en est de même des deux résultats fournis par $a' + b'\sqrt{-1}$. En outre, chacun des deux premiers résultats est différent de chacun des deux seconds; car si l'un de ces deux derniers était égal à l'un des premiers, son carré serait $a + b\sqrt{-1}$, comme celui du premier, et non l'expression différente $a' + b'\sqrt{-1}$, ainsi qu'on l'a supposé.

On prouverait par des raisonnements analogues que les radicaux $\sqrt[3^k]{A}$ et $\sqrt[2^k.3^k]{A}$ ont 3^k et $2^k.3^k$ valeurs différentes.

213. Considérons enfin le radical $\sqrt[m]{A}$, qui a pour valeurs les m solutions de l'équation $x^m - A = 0$ (210).

Soit a une quelconque de ces valeurs, on aura $a^m = A$, et l'équation ci-dessus deviendra $x^m - a^m = 0$. Représentons par y le quotient de x par a, on aura $\frac{x}{a} = y$, d'où $x = ay$; substituant, il vient $a^m y^m - a^m = 0$, ou $y^m - 1 = 0$, dont les m solutions multipliées par a reproduiront évidemment les m solutions de

$$x^m - A = 0.$$

D'où il résulte qu'on obtient les m valeurs de $\sqrt[m]{A}$ en multipliant l'une quelconque d'entre elles par les m valeurs de $\sqrt[m]{1}$.

Considérons les cas où m est impair ou pair.

1° Si m est impair, il ne peut y avoir qu'une valeur réelle. Car on a vu (57) que $y^m - 1$ divisé par $y - 1$ donne pour quotient

$$y^{m-1} + y^{m-2} + \ldots + y + 1;$$

l'équation $y^m - 1 = 0$ peut donc se mettre sous la forme

$$(y - 1)(y^{m-1} + y^{m-2} + \ldots + y + 1) = 0.$$

Le premier facteur, étant égalé à zéro, donne la seule valeur réelle $y = +1$. Car le second facteur ne peut devenir nul si l'on remplace y par une valeur réelle et positive, puisque tous les termes restent positifs par cette substitution; et l'équation $y^m - 1 = 0$ ne peut admettre de solution réelle négative, qui donnerait, à cause de l'exposant m impair,

$$-y^m - 1 = 0.$$

2° Si m est pair, il ne peut y avoir que deux valeurs réelles. Car soit $m = 2n$; posant $y^2 = u$, on aura $y^{2n} = u^n$; et par conséquent l'équation $y^{2n} - 1 = 0$ deviendra $u^n - 1 = 0$, ou bien

$$(u - 1)(u^{n-1} + u^{n-2} + \ldots + u + 1) = 0,$$

qui ne peut avoir d'autre solution réelle et positive que $u = +1$.

Or celle-ci donne $y^2 = +1$, d'où l'on tire

$$y = +1, \; y = -1.$$

En outre, il est clair que chaque valeur négative ou imaginaire de u donnera pour y deux valeurs imaginaires égales et de signes contraires.

Cela posé, si A est une quantité réelle, on pourra toujours trouver, par les procédés connus, la racine m^e de sa valeur absolue; et en multipliant cette racine a par les m valeurs de $\sqrt[m]{1}$, on aura les m valeurs de $\sqrt[m]{A}$.

Si m est pair, et si, en outre, A est positif, $\sqrt[m]{A}$ n'aura que les deux valeurs réelles $+a$ et $-a$; toutes les autres seront nécessairement imaginaires, et deux à deux égales et de signes contraires.

Si m est impair, $\sqrt[m]{A}$ n'aura que la seule valeur réelle a prise avec le signe de A; toutes les autres seront imaginaires, et deux à deux égales et de signes contraires.

Par conséquent, en admettant (210) que toute équation du degré m a m solutions différentes, on tire de ce qui précède les conclusions suivantes :

1° *Toute quantité a autant de racines différentes d'un degré quelconque, qu'il y a d'unités dans l'indice de ce degré.*

2° *Pour chaque degré, les racines de toute quantité s'obtiennent en multipliant l'une quelconque d'entre elles par les racines de l'unité.*

3° *Selon que l'indice est impair ou pair, toute quantité ne peut avoir qu'une ou deux racines réelles.*

4° *Si l'indice est pair, toutes les racines seront deux à deux égales et de signes contraires; en outre, si la quantité donnée est réelle et positive, deux des racines seront réelles.*

5° *Si l'indice est impair, outre les racines deux à deux égales et de signes contraires correspondantes au degré pair immédiatement inférieur, il y aura la seule racine qui puisse être réelle, et qui le sera en effet, avec le signe de la quantité donnée, si celle-ci est réelle.*

§ 2. *Calcul des radicaux algébriques.*

214. Si l'on appliquait aux radicaux, considérés dans toute leur généralité, les règles données pour le calcul des radicaux arithmétiques, on pourrait obtenir des résultats inexacts.

Par exemple, d'après le principe établi plus haut (202, 2°), on doit avoir $\sqrt{-a^2}=\sqrt[4]{(-a^2)^2}$; or $\sqrt[4]{(-a^2)^2}=\sqrt[4]{a^4}$, il en résulterait donc $\sqrt{-a^2}=\sqrt[4]{a^4}$, résultat évidemment inexact, le premier membre représentant une quantité imaginaire, et le second une quantité réelle.

L'inexactitude du résultat provient de ce que l'expression formant le second membre admet quatre valeurs, dont le premier ne peut fournir que deux.

De même, si l'on applique au produit $\sqrt{-a}.\sqrt{-a}$ la règle donnée (204) pour la multiplication des radicaux arithmétiques, on trouve $\sqrt{-a}.\sqrt{-a}=\sqrt{-a.-a}=\sqrt{a^2}$, qui admet les deux valeurs $+a$ et $-a$, tandis que le produit $\sqrt{-a}.\sqrt{-a}$, étant le carré de $\sqrt{-a}$, ne semble pas devoir être autre que $-a$. Ce paradoxe provient de ce qu'on restreint mal à propos le sens du produit $\sqrt{-a}.\sqrt{-a}$, en le confondant avec le carré de $\sqrt{-a}$. Car chacun des deux radicaux facteurs admettant deux valeurs égales et de signes contraires, le produit doit avoir autant de valeurs qu'on peut en former en multipliant successivement chacune des deux premières par chacune des deux autres.

Supposons d'abord, pour plus de clarté, qu'on ait à multiplier, en général, $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$, a et b étant des quantités quelconques. En représentant par α la valeur arithmétique de $\sqrt{a}$, et par β celle de $\sqrt{b}$, le produit admettra les quatre déterminations

$$(+\alpha).(+\beta),\ (+\alpha).(-\beta),\ (-\alpha).(+\beta),\ (-\alpha).(-\beta),$$

qui se réduisent aux deux suivantes

$$+\alpha\beta,\ -\alpha\beta,$$

dont chacune, élevée au carré, donne $\alpha^2\beta^2$ ou ab. On a donc toujours $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

Si maintenant on remplace a et b par $-a$, on doit de même, pour former le produit $\sqrt{-a}.\sqrt{-a}$, multiplier les deux valeurs $+\alpha$, $-\alpha$ du premier facteur par les deux valeurs $+\alpha$, $-\alpha$ du second; on obtient alors les produits $+\alpha^2$ et $-\alpha^2$, qui sont précisément les deux valeurs de $\sqrt{a^2}$, puisque α désigne une valeur de $\sqrt{-a}$, et que par conséquent $+\alpha^2=-a$, $-\alpha^2=+a$. Mais lorsqu'on fait le carré de $\sqrt{-a}$, chacune des deux valeurs $+\alpha$, $-\alpha$ ne devant être multipliée que par elle-même, on ne trouve plus que le résultat $+\alpha^2$ ou $-a$.

Il en est de même pour le produit $\sqrt{-a}.\sqrt{-b}$. Car en nommant α et β les valeurs arithmétiques de ces radicaux,

on aura, dans toute la généralité, $\sqrt{-a}=\alpha\sqrt{-1}$, $\sqrt{-b}=\beta\sqrt{-1}$, parce que le radical $\sqrt{-1}$ renferme le double signe $\pm$.

De là on conclut

$$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=\alpha\beta(\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1})=\alpha\beta(\pm 1)=\pm\alpha\beta.$$

Mais si l'on doit multiplier seulement $+\alpha\sqrt{-1}$ par $+\beta\sqrt{-1}$, ou $-\alpha\sqrt{-1}$ par $-\beta\sqrt{-1}$, c'est-à-dire les valeurs des radicaux correspondantes à une même valeur de $\sqrt{-1}$, on n'aura que le seul produit $-\alpha\beta$.

215. Prenons pour dernier exemple le produit $\sqrt[4]{a}.\sqrt{-1}$. En réduisant le second radical au même indice que le premier, on a $\sqrt[4]{a}.\sqrt{-1}=\sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{(-1)^2}=\sqrt[4]{a}$, résultat réel, quoique le produit de la quantité réelle $\sqrt[4]{a}$ par $\sqrt{-1}$ doive être imaginaire. Ce paradoxe provient de ce qu'on prend la quantité $\sqrt[4]{a}$ dans un sens trop restreint. Car soit α la valeur arithmétique du radical $\sqrt[4]{a}$, les quatre déterminations de $\sqrt[4]{a}$ seront (211)

$$+\alpha,\quad -\alpha,\quad +\alpha\sqrt{-1},\quad -\alpha\sqrt{-1};$$

or celles-ci, multipliées par les deux valeurs $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ de $\sqrt{-1}$, donnent, pour le produit $\sqrt[4]{a}.\sqrt{-1}$, huit valeurs qui se réduisent précisément aux quatre précédentes. D'où il suit que l'égalité $\sqrt[4]{a}.\sqrt{-1}=\sqrt[4]{a}$ est exacte, lorsqu'on la considère dans toute sa généralité.

216. Ce qui précède suffit pour montrer la nécessité de passer en revue les règles données pour le calcul des radicaux arithmétiques, afin de s'assurer si l'on peut les adapter au calcul des radicaux algébriques, de manière à faire acquérir aux résultats toute la généralité qu'ils doivent avoir.

Considérons d'abord les deux principes établis dans le n° 202. Le premier convient parfaitement aux radicaux algé-

briques ; de sorte qu'on a, en général,

$$\sqrt[m]{a^m b^{m+2} c} = ab \sqrt[m]{b^2 c}.$$

En effet, le second membre a toujours m valeurs aussi bien que le premier, et chacune de ces valeurs, étant élevée à la puissance m^e, reproduira la quantité $a^m b^{m+2} c$.

Mais le second principe n'est pas, en général, applicable aux radicaux algébriques, ainsi qu'on vient de le voir (214), parce qu'en augmentant ou en diminuant l'indice d'un radical, on augmente ou l'on diminue le nombre des valeurs qu'il doit avoir. On ne peut donc pas réduire au même indice des radicaux algébriques d'indices différents. Cependant le principe en question sert encore, comme nous le verrons tout à l'heure (220), dans le cas de la multiplication ou de la division des radicaux d'indices différents, lorsqu'on a soin de les réduire au même indice en cherchant, comme nous l'avons indiqué, leur plus petit commun dividende.

217. L'addition et la soustraction des radicaux algébriques ne pouvant donner lieu à aucune observation, puisque la somme ou la différence de plusieurs radicaux semblables aura un nombre de valeurs marqué par l'indice commun, passons à la multiplication et à la division.

Si l'on ne considère d'abord que les radicaux de même indice, les règles données plus haut (204, 205) leur sont immédiatement applicables, c'est-à-dire qu'on a toujours

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

En effet, chacun des facteurs $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, ayant m valeurs différentes, si l'on multiplie les m valeurs de l'un par les m valeurs de l'autre, on trouve m^2 produits dont m au moins sont différents. Car si l'on multiplie les m valeurs différentes du premier radical par une valeur quelconque du second, il est clair qu'on aura m produits différents entre eux. Or, chacun des m^2 produits étant élevé à la puissance m^e doit reproduire ab. Donc puisque $\left(\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}\right)^m = ab$, toutes les valeurs du produit

$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$ doivent être comprises dans les m valeurs de $\sqrt[m]{ab}$, et sont par conséquent en même nombre.

De plus, comme en multipliant les m valeurs de $\sqrt[m]{a}$ par l'une quelconque des m valeurs de $\sqrt[m]{b}$, on obtient m produits différents, il en résulte que si l'on multiplie ces m valeurs de $\sqrt[m]{a}$ par une autre valeur de $\sqrt[m]{b}$, on doit retrouver les mêmes produits; seulement ils seront dans un autre ordre.

Les mêmes raisonnements s'appliquent à la division des radicaux de même indice.

218. Pour l'élévation aux puissances, nous distinguerons trois cas avec M. Lefebvre de Fourcy, à qui l'on doit la démonstration suivante :

1° Lorsque les indices m et n sont premiers entre eux, il faut prouver qu'on a toujours $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$.

D'abord le second membre étant élevé à la puissance m^e donne a^n, et il en est de même du premier, puisque l'on a

$$\left[\left(\sqrt[m]{a}\right)^n\right]^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[m]{a^m}\right)\right]^n = a^n;$$

d'où il résulte que toutes les valeurs de $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$ se trouvent parmi celles de $\sqrt[m]{a^n}$. Il reste maintenant à faire voir qu'elles sont au nombre de m, c'est-à-dire qu'en représentant par α, β, γ..., les m valeurs de $\sqrt[m]{a}$, qui sont toutes différentes, celles de $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$, ou α^n, β^n, γ^n,..... seront toutes également différentes.

En effet, supposons qu'il y en ait d'égales, et soit, par exemple, $\alpha^n = \beta^n$. Comme α et β sont des racines m^{es} de a, il est clair que l'on doit avoir $\alpha^m = \beta^m$; or, si l'on suppose $m > n$, en nommant q le quotient de la division de m par n, et r le reste, ce qui donne $m = nq + r$, on aura

$$\alpha^{nq+r} = \beta^{nq+r},$$

et en retranchant de cette égalité la première $\alpha^n = \beta^n$ élevée à la puissance q, c'est-à-dire $\alpha^{nq} = \beta^{nq}$, il viendra

$$\alpha^r = \beta^r.$$

Continuant de même, on fera $n = rq' + r'$, ce qui changera l'égalité $\alpha^n = \beta^n$ en $\alpha^{rq'+r'} = \beta^{rq'+r'}$; et en retranchant de celle-ci la puissance q' de $\alpha^r = \beta^r$, c'est-à-dire $\alpha^{rq'} = \beta^{rq'}$, il viendra

$$\alpha^{r'} = \beta^{r'}.$$

Sans aller plus loin, on voit qu'en opérant toujours ainsi, on aurait des égalités analogues où les exposants seraient les restes successifs fournis par la recherche du plus grand commun diviseur entre m et n; mais ces nombres étant, par hypothèse, premiers entre eux, on tombera nécessairement sur un reste égal à 1, d'où l'on conclura $\alpha = \beta$, ce qui ne peut avoir lieu. Donc les m valeurs de $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$ sont différentes, et par conséquent l'on a

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

2° Si l'indice du radical est un multiple mn de l'exposant n de la puissance, en nommant x une valeur de $\sqrt[mn]{a}$, on aura $x = \sqrt[mn]{a}$ et par suite $x^{mn} = a$, ou bien $(x^n)^m = a$, d'où $x^n = \sqrt[m]{a}$. Donc $\left(\sqrt[mn]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a}$, et par conséquent les valeurs du premier membre sont les mêmes que celles du second.

3° Si l'indice du radical et l'exposant de la puissance sont des nombres tels que mp et np, où p représente le produit de tous leurs facteurs communs, on aura successivement, d'après les deux premiers cas,

$$\left(\sqrt[mp]{a}\right)^{np} = \left[\left(\sqrt[mp]{a}\right)^p\right]^n = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

Mais dans ce troisième cas, ainsi que dans le second, si l'on appliquait la règle du premier, le résultat aurait un trop grand nombre de valeurs. Par conséquent, la règle de l'élévation aux puissances, donnée (206) pour les radicaux arithmétiques, n'est rigoureusement applicable aux radicaux algébriques que dans le premier des trois cas précédents, quoiqu'on l'applique indistinctement à tous trois.

219. Quant à la règle donnée (207) pour l'extraction des ra-

cines des radicaux, elle est entièrement applicable ici, et l'on a toujours

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

Car soit $x=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, on aura $x^n=\sqrt[m]{a}$, et $x^{mn}=a$, d'où

$$x=\sqrt[mn]{a}.$$

220. Nous pouvons maintenant compléter la règle relative à la multiplication et à la division des radicaux (217), en l'étendant au cas où les indices sont différents.

1° Si les indices m et n sont premiers entre eux, je dis qu'on aura

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{a^nb^m}.$$

Car soit $x=\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}$; on tire de là

$$x^{mn}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn}\left(\sqrt[n]{b}\right)^{mn}=a^nb^m,$$

et par suite

$$x=\sqrt[mn]{a^nb^m}.$$

D'où il résulte que toutes les valeurs du produit $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}$ se trouvent parmi les mn valeurs de $\sqrt[mn]{a^nb^m}$. Il est facile de voir qu'elles sont également au nombre de mn; car si l'on représente par α, β, γ,..... les m valeurs de $\sqrt[m]{a}$, qui sont toutes différentes, et par α', β', γ',... les n valeurs de $\sqrt[n]{b}$, en multipliant les m premières par chacune des n autres, on obtiendra mn produits $\alpha\alpha'$, $\beta\alpha'$,... qui seront toutes les déterminations de $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}$. Il reste à montrer qu'elles sont toutes différentes.

En effet, supposons égales deux d'entre elles, $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, par exemple, formées de facteurs différents, ce qui est le seul cas à considérer; on aurait $\alpha\alpha'=\beta\beta'$ et par suite $\alpha^n\alpha'^n=\beta^n\beta'^n$; or $\alpha'^n=\beta'^n=b$; donc l'égalité précédente revient à celle-ci $\alpha^n=\beta^n$; mais on a aussi $\alpha^m=\beta^m$, puisque α et β sont des valeurs de $\sqrt[m]{a}$. On est donc ainsi ramené au premier cas du n° 218, et l'on parviendrait de même à $\alpha=\beta$, ce qui ne peut être.

2° Si les indices ont des facteurs communs dont le produit soit p, on aura encore

$$\sqrt[mp]{a}\sqrt[np]{b}=\sqrt[mnp]{a^nb^m}.$$

Car d'après les règles de la multiplication (217) et de l'extraction de racines (219), on a successivement

$$\sqrt[mp]{a}\sqrt[np]{b}=\sqrt[p]{\sqrt[m]{a}}\sqrt[p]{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[p]{\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}};$$

et comme alors, d'après ce qu'on vient de voir,

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{a^nb^m},$$

on aura
$$\sqrt[p]{\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}}=\sqrt[mnp]{a^nb^m},$$

et par conséquent
$$\sqrt[mp]{a}\sqrt[np]{b}=\sqrt[mnp]{a^nb^m}.$$

La démonstration serait la même pour la division.

CHAPITRE VI.

FRACTIONS CONTINUES. PROGRESSIONS. LOGARITHMES. PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

SECTION PREMIÈRE.

FRACTIONS CONTINUES.

§ 1er. *Formation et propriétés des réduites.*

221. Nous avons donné en Arithmétique (nos 92—96) l'idée des *fractions continues*, et fait voir qu'elles servent à obtenir des valeurs de plus en plus approchées d'une fraction ordinaire. Mais leur utilité est bien plus grande en Algèbre, où elles fournissent, en général, des valeurs de plus en plus approchées de toute quantité irrationnelle.

Ici, comme en Arithmétique, nous ne considérerons que les fractions continues dont les numérateurs successifs sont l'unité, parce que celles dont les numérateurs sont des quantités quelconques n'offrent aucune application intéressante.

222. Nous démontrerons d'abord que la loi de *formation des réduites*, donnée en Arithmétique (n° 94), est générale.

Soit x la quantité dont on veut approcher. Supposons-la comprise entre les nombres entiers consécutifs p, $p+1$, et faisons

$$x=p+\frac{1}{x'},\quad x'=q+\frac{1}{x''},\quad x''=r+\frac{1}{x'''},\quad \text{etc.}$$

les quantités q, r, etc., étant les plus grands nombres entiers contenus dans x', x'', etc., lesquels nombres sont appelés *quotients incomplets*, ou bien *quotients*, pour abréger. Les valeurs successives de x seront

$$x=p,\quad x=p+\frac{1}{q},\quad x=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}$$

Si on les réduit en fractions ordinaires, en ayant soin, pour la troisième, de multiplier par r les deux termes de la fraction $\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}}$, on obtient les *réduites*

$$x=\frac{p}{1},\quad x=\frac{pq+1}{q},\quad x=\frac{(pq+1)r+p}{qr+1},\ \text{etc.}$$

L'examen de la troisième apprend que son numérateur égale le produit du numérateur de la seconde par le troisième quotient, plus le numérateur de la première, et que son dénominateur égale le produit du dénominateur de la seconde par le troisième quotient, plus le dénominateur de la première (voyez notre Arith. n° 94).

Pour montrer que cette loi est générale, il suffit de prouver que si elle est vraie pour trois réduites consécutives, elle le sera également pour la suivante. Car alors, comme elle a lieu pour trois, elle aura encore lieu pour quatre, par suite pour cinq, et par conséquent pour un nombre quelconque de réduites.

Soient donc $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}, \frac{P''}{Q''}$ trois réduites consécutives quelconques, m le dernier quotient compris dans $\frac{P''}{Q''}$, et admettons qu'on ait $P'' = P'm + P$, $Q'' = Q'm + Q$. La réduite suivante $\frac{P'''}{Q'''}$ se déduira de $\frac{P''}{Q''}$ en y remplaçant m par $m + \frac{1}{n}$, n étant le nouveau quotient, ce qui donnera

$$\frac{P'''}{Q'''} = \frac{P'(mn+1) + Pn}{Q'(mn+1) + Qn} = \frac{(P'm + P)n + P'}{(Q'm + Q)n + Q'} = \frac{P''n + P'}{Q''n + Q'}.$$

La nouvelle réduite suit donc la loi énoncée plus haut, qui est par conséquent générale ; et pour y comprendre les deux premières réduites, on peut supposer que la première est précédée par les deux fractions $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$. On a donc la règle suivante :

Règle générale. *On obtient le numérateur ou le dénominateur d'une réduite quelconque en ajoutant le produit du numérateur ou du dénominateur précédent par le nouveau quotient, avec le numérateur ou le dénominateur de l'avant-dernière réduite.*

Si l'on omet les fractions $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$, il faut, dans la règle, insérer la restriction, *à partir de la troisième réduite.*

De là il résulte que 1° si la fraction continue ne se termine pas, les numérateurs et les dénominateurs successifs forment deux séries indéfiniment croissantes ; 2° si la fraction continue se termine, il est toujours possible d'en exprimer la valeur par une fraction ordinaire.

Nous ne reviendrons pas ici sur le développement des fractions ordinaires en fractions continues, ni sur la formation des fractions *convergentes*, les raisonnements employés en Arithmétique (n°s 92, 93 et 95), étant indépendants des exemples choisis, et par conséquent applicables aux fractions algébriques.

Dans la pratique, on dispose l'opération en deux lignes, dont la première est formée par les quotients, et la seconde par les

réduites correspondantes, comme ci-après:

$$\begin{array}{cccccc} & & p, & q, & r, & \ldots\ldots \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{0}, & \frac{p}{1}, & \frac{pq+1}{q}, & \frac{(pq+1)r+p}{qr+1}, & \ldots\ldots \end{array}$$

223. *La vraie valeur de la fraction continue est comprise entr deux réduites consécutives quelconques, dont la dernière est l plus approchée de cette valeur.*

En effet, soient les deux réduites consécutives $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$. S l'on désigne par x la vraie valeur, et par y le quotient comple correspondant à la réduite suivante $\frac{P''}{Q''}$, qui égale, comme o vient de le voir, $\frac{P'm+P}{Q'm+Q}$, on a

$$x=\frac{P'y+P}{Q'y+Q},$$

d'où l'on tire successivement

$$Q'yx+Qx=P'y+P,$$
$$y(Q'x-P')=P-Qx,$$
$$Q'y\left(x-\frac{P'}{Q'}\right)=Q\left(\frac{P}{Q}-x\right),$$
$$x-\frac{P'}{Q'}=\frac{Q}{Q'y}\left(\frac{P}{Q}-x\right).$$

Or y étant un quotient complet, $\frac{1}{y}$ est nécessairement plus petit que 1, et par suite y est plus grand que 1. Comme d'ailleurs Q est plus petit que Q', il est clair que $\frac{Q}{Q'y}$ est plus petit que 1. Donc la différence $x-\frac{P'}{Q'}$ est de même signe que la différence $\frac{P}{Q}-x$, et plus petite qu'elle, abstraction faite du signe.

Il suit de là que la vraie valeur x est comprise entre les deux réduites $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, et que cette dernière est la plus approchée des deux.

Remarque. C'est par suite de cette propriété qu'on a donné aux réduites le nom de *fractions convergentes* (voy. notre Arith. n° 93). La différence entre la vraie valeur x et une réduite se nomme l'*erreur* de la réduite.

Il résulte encore de là que *les réduites consécutives sont alternativement plus petites et plus grandes que la vraie valeur.*

224. *La différence entre deux réduites consécutives est égale à l'unité divisée par le produit de leurs dénominateurs.*

En effet, soient les trois réduites consécutives $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}, \frac{P''}{Q''}$.

On a
$$\frac{P''}{Q''} - \frac{P'}{Q'} = \frac{P''Q' - P'Q''}{Q'Q''}.$$

Or (222), $\quad P'' = P'm + P$ et $Q'' = Q'm + Q$;

donc $\frac{P''}{Q''} - \frac{P'}{Q'} = \frac{PQ' - P'Q}{Q'Q''}$, d'où $P''Q' - P'Q'' = PQ' - P'Q$.

Par conséquent, si, d'une part, on prend la différence entre $\frac{P''}{Q''}$ et $\frac{P'}{Q'}$, et, de l'autre, entre $\frac{P'}{Q'}$ et $\frac{P}{Q}$, les numérateurs de ces différences seront égaux au signe près. Mais en retranchant la première réduite $\frac{p}{1}$ de la suivante $\frac{pq+1}{q}$, on a

$$\frac{pq+1}{q} - \frac{p}{1} = \frac{pq+1-pq}{q} = \frac{1}{q}.$$

Donc, en général,

$$P''Q' - P'Q'' = P'Q - PQ' = \pm 1,$$

le signe + ou le signe — ayant lieu, suivant que la seconde des deux fractions, dont on prend la différence, est de rang pair ou impair, ce qui démontre le principe énoncé.

Remarque. De là résultent les conséquences suivantes :

1° *Les réduites de rang pair sont plus grandes que celles de rang impair.*

2° *Toutes les réduites sont des fractions irréductibles.*

Car si la réduite $\frac{P}{Q}$ n'était pas irréductible, P et Q auraient un facteur commun qui devrait ainsi diviser $P'Q - PQ'$, et par suite ± 1.

3° *Les numérateurs de deux réduites consécutives sont premiers entre eux, et il en est de même de leurs dénominateurs.*

Car tout facteur commun à P et à P′, ou bien à Q et à Q′, devrait diviser $P'Q - PQ'$, et par suite ± 1.

4° *La différence entre deux réduites consécutives est plus petite que l'unité divisée par le carré du dénominateur de la première.*

En effet, on a $\frac{P'}{Q'} - \frac{P}{Q} = \frac{\pm 1}{QQ'}$. Or, les dénominateurs allant toujours en croissant, on a $Q < Q'$, et par suite $Q^2 < QQ'$. Donc $\frac{\pm 1}{QQ'}$ est $< \frac{\pm 1}{Q^2}$.

5° *On peut trouver une réduite aussi approchée de la vraie valeur qu'on voudra.*

En effet, la vraie valeur étant toujours comprise (223) entre deux réduites consécutives $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, il en résulte que l'erreur de la réduite $\frac{P}{Q}$ est $< \frac{1}{QQ'}$, et comme les dénominateurs vont toujours en augmentant, il est clair que les erreurs vont toujours en diminuant, à mesure qu'on prolonge l'opération.

225. *Deux réduites consécutives ne peuvent comprendre entre elles une fraction d'un dénominateur plus petit que celui de la première, et qui approche davantage de la vraie valeur de la fraction continue.*

En effet, soient $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$ deux réduites consécutives comprenant une fraction irréductible $\frac{m}{n}$ qui approche davantage de la vraie valeur x, n étant $< Q$; on aura

$$\frac{P'}{Q'} - \frac{m}{n} = \frac{P'n - Q'm}{Q'n}; \quad \text{or} \quad \frac{P'}{Q'} - \frac{P}{Q} = \frac{\pm 1}{QQ'},$$

on aura donc la fraction $\frac{P'n - Q'm}{Q'n}$ plus petite que $\frac{1}{QQ'}$, abstraction faite du signe. Mais le moins qu'on puisse supposer pour la valeur de $P'n - Q'm$ est l'unité, puisque cette quantité ne peut être nulle.

De là résulterait $\frac{1}{Q'n} < \frac{1}{QQ'}$, ou $\frac{1}{n} < \frac{1}{Q}$, ou enfin $n > Q$, ce qui est contre l'hypothèse.

Si $P'n - Q'm$ était, abstraction faite du signe, une quantité plus grande que l'unité, R par exemple, on aurait

$$\frac{R}{n} < \frac{1}{Q}, \quad \text{d'où} \quad n > QR \quad \text{et} \quad \frac{n}{R} > Q.$$

Donc, à plus forte raison, n serait $> Q$.

Le principe est ainsi démontré.

Donc, en général, *une réduite quelconque approche davantage de la vraie valeur, que toute autre fraction dont le dénominateur est plus petit que celui de la réduite.*

§ 2. *Développement des quantités irrationnelles en fractions continues.*

226. *Toute quantité irrationnelle peut se développer en fraction continue.*

En effet, soit A une quantité irrationnelle quelconque. Supposons que par un procédé relatif à la nature de cette quantité, on ait déterminé le plus grand entier α contenu dans A. La différence entre A et α sera moindre que l'unité, et l'on aura

$$A - \alpha < 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{A - \alpha} > 1.$$

Soit $\frac{1}{A - \alpha} = b$, il viendra

$$A - \alpha = \frac{1}{b}, \quad \text{d'où} \quad A = \alpha + \frac{1}{b}.$$

En désignant par β le plus grand entier contenu dans b, on aura

$$b - \beta < 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{b - \beta} > 1.$$

Soit $\frac{1}{b - \beta} = c$, il viendra

$$b - \beta = \frac{1}{c}, \quad \text{et} \quad b = \beta + \frac{1}{c};$$

donc $$A = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{c}}.$$

En désignant par γ le plus grand entier contenu dans c, on aura $c - \gamma < 1$, $\frac{1}{c-\gamma} > 1$, et en faisant $\frac{1}{c-\gamma} = d$, il viendra

$$c - \gamma = \frac{1}{d}, \quad \text{d'où} \quad c = \gamma + \frac{1}{d}.$$

Donc $$A = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{d}}};$$

ainsi de suite.

Soit, par exemple, $A = \sqrt{29}$. Comme 5 est le plus grand entier contenu dans $\sqrt{29}$, on aura successivement

$$b = \frac{1}{\sqrt{29} - 5} = \frac{\sqrt{29} + 5}{(\sqrt{29} - 5)(\sqrt{29} + 5)} = \frac{\sqrt{29} + 5}{4}.$$

Pour avoir le plus grand entier β contenu dans la dernière expression, posons $\sqrt{29} = 5 + r$, d'où $r = \sqrt{29} - 5$, on aura

$$b = \frac{\sqrt{29} + 5}{4} = \frac{10 + r}{4} = 2 + \frac{2 + r}{4} = 2 + \frac{\sqrt{29} + 2 - 5}{4}$$
$$= 2 + \frac{\sqrt{29} - 3}{4}.$$

Ainsi l'on a $\beta = 2$, et $\frac{\sqrt{29} - 3}{4} < 1$, d'où $\frac{4}{\sqrt{29} - 3} > 1$.

Or $$\frac{4}{\sqrt{29} - 3} = \frac{4\sqrt{29} + 12}{29 - 9} = \frac{\sqrt{29} + 3}{5}.$$

Pour avoir le plus grand entier γ contenu dans la dernière expression, posons $\sqrt{29} = 5 + r$, on aura

$$c = \frac{\sqrt{29} + 3}{5} = \frac{5 + r + 3}{5} = 1 + \frac{r + 3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{29} - 5 + 3}{5}$$
$$= 1 + \frac{\sqrt{29} - 2}{5}.$$

On a donc $\gamma = 1$, et $\frac{\sqrt{29}-2}{5} < 1$, d'où $\frac{5}{\sqrt{29}-2} > 1$.

Si l'on opère de même pour chercher le plus grand entier δ contenu dans la dernière expression, il vient successivement

$$\frac{5}{\sqrt{29}-2} = \frac{5(\sqrt{29}+2)}{29-4} = \frac{\sqrt{29}+2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{29}-3}{5}.$$

On a donc $\delta = 1$, et $\frac{\sqrt{29}-3}{5} < 1$, d'où $\frac{5}{\sqrt{29}-3} > 1$.

En opérant encore de même, on a

$$\frac{5}{\sqrt{29}-3} = \frac{5(\sqrt{29}+3)}{29-9} = \frac{\sqrt{29}+3}{4} = \frac{5+3+\sqrt{29}-5}{4}$$
$$= 2 + \frac{\sqrt{29}-5}{4}.$$

On trouve donc $\varepsilon = 2$, ce qui ramène la suite des nombres déjà trouvés, 1, 1, 2, etc.

Par conséquent $\sqrt{29} = 5 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\text{ etc.}}}}}$

On peut vérifier qu'il en sera de même dans tous les exemples particuliers, et qu'en général

Toute racine irrationnelle d'une équation du second degré dont les coefficients sont rationnels est égale à une fraction continue périodique.

Remarque. Lagrange a donné une démonstration de ce théorème dans son *Traité de la résolution des équations numériques*, auquel nous renvoyons, parce qu'elle dépasse les bornes de ces éléments.

Mais on peut démontrer simplement la réciproque qui s'énonce ainsi :

Toute fraction continue périodique représente l'une des racines d'une équation du second degré à coefficients rationnels.

En effet, supposons, pour plus de généralité, une fraction continue composée d'une partie non périodique, dont les quo-

tients sont $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, et d'une partie périodique, dont les quotients sont $a, b, c, \ldots l$.

En désignant par x la valeur de la fraction totale, et par z celle de la partie périodique $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{ etc.}}}$,

on aura évidemment

$$z=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cdots+\cfrac{1}{l+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{ etc.}}}}}}}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cdots+\cfrac{1}{l+\cfrac{1}{z}}}} \quad \text{et} \quad x=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cdots+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{z}}}}.$$

D'abord il est facile de voir que si l'on convertit la valeur de z en fraction ordinaire, la première égalité deviendra une équation du second degré; mais on peut l'obtenir d'une manière générale par la considération des réduites.

En effet, si l'on représente par $\frac{P''}{Q''}$ la réduite correspondante au quotient a qui recommence la période, par $\frac{P'}{Q'}$ la précédente, et par $\frac{P}{Q}$ celle qui vient avant, on aura

$$\frac{P''}{Q''}=\frac{P'a+P}{Q'a+Q}.$$

Mais comme la période qui recommence par a est la valeur de z, il est clair qu'on obtiendra cette valeur en remplaçant a par z dans l'expression précédente, ce qui donne

$$z=\frac{P'z+P}{Q'z+Q}, \quad \text{d'où} \quad Q'z^2+Qz=P'z+P,$$

ou

$$Q'z^2+(Q-P')z-P=0.$$

Si maintenant, pour tenir compte de la partie non pério-

dique, on représente par $\frac{M'}{N'}$ la réduite correspondante au dernier quotient λ, et la précédente par $\frac{M}{N}$, la réduite qui suit $\frac{M'}{N'}$ sera la valeur de x, puisque z équivaut à toute la période. Ainsi en introduisant le quotient complet z, on aura

$$x=\frac{M'z+M}{N'z+N}, \quad \text{d'où} \quad z=\frac{M-Nx}{N'x-M'},$$

et en substituant cette valeur à z dans l'équation du second degré en z, nous aurons celle du second degré en x, qui, toutes réductions faites, sera

$$\begin{aligned}&[Q'N^2-(Q-P')NN'-PN'^2]\,x^2\\&+[2PM'N'-2MNQ'+(Q-P')(MN'+M'N)]\,x\\&-[PM'^2+MM'(Q-P')-Q'M^2]=0.\end{aligned}$$

227. Si l'on veut réduire en fraction continue une quantité irrationnelle déjà exprimée approximativement en décimales, comme, par exemple, le rapport de la circonférence au diamètre $\pi=3,1415926535\ldots$, on ajoute une unité à la dernière décimale qu'on veut conserver, de sorte que, si cette décimale est la sixième, la valeur exacte de π est comprise entre les deux fractions

$$\frac{31\,415\,926\,535}{10\,000\,000\,000}, \quad \frac{31\,415\,926\,536}{10\,000\,000\,000};$$

par conséquent, si on les développe en fractions continues, il est clair que leur partie commune sera une valeur de π. En effet, π étant compris entre la première et la deuxième, la même partie entière 3, qui se trouve dans l'une et dans l'autre, doit aussi se trouver dans π; et en outre la partie fractionnaire, qui complète la première valeur de π, est comprise entre les parties fractionnaires qui complètent la première valeur de chaque fraction. Or, cette partie fractionnaire étant l'unité divisée par le premier quotient, il en résulte que le premier quotient lui-même relatif à π est compris entre les premiers quotients relatifs aux deux fractions. En raisonnant comme tout à l'heure, on verra de même que la partie entière commune à ces deux

premiers quotients relatifs aux fractions doit se trouver dan la valeur de π; et ainsi de suite.

Cela posé, on développera les deux fractions ci-dessus, en ne prenant que les quotients communs aux deux d loppements pour calculer les réduites correspondantes, o mera le tableau suivant :

$$\text{Quotients.....}\ 3,\quad 7,\quad 15,\quad 1,\ldots$$

$$\text{Réduites......}\ \frac{3}{1},\quad \frac{22}{7},\quad \frac{333}{106},\quad \frac{355}{113},\ldots$$

Le second rapport, qui est celui d'Archimède, et le q trième, dû à Métius, sont assez simples; mais les rapports vants, qui sont bien plus approchés, sont aussi beau plus compliqués, ayant 5 chiffres au dénominateur et numérateur.

SECTION II.

PROGRESSIONS.

228. Nous avons exposé dans notre Arithmétique (130 162) les propriétés des *équidifférences*, des *proportions* s *pro gressions par différence* et *par quotient* (*). Les raiso men employés, étant indépendants des exemples choisis, ppli queront également bien quand on remplacera les no s pa des lettres, et l'on en conclura les mêmes propriét Nou

(*) Les *équidifférences, proportions, progressions par diffé* *par quotient,* sont souvent nommées respectivement *proportions arith- métiques, proportions géométriques, progressions arithmétiques* e *progressions géométriques.*

Nous avons rejeté ces dénominations, qui nous paraissent pe convenables, puisqu'on s'occupe indifféremment de ces diverse suites de termes, soit en Arithmétique, soit en Géométrie, soit e Algèbre, etc. Les premiers noms ont en outre l'avantage de porte avec eux leur propre signification.

ous bornerons donc à reprendre succinctement les progres-
ons par différence et par quotient, pour en déduire les prin-
les formules utiles dans les applications.

§ 1er. *Progressions par différence. Piles de boulets.*

9. *Une progression par différence est une suite de termes que chacun d'eux, étant diminué du précédent, donne tou-rs la même différence.*

Cette différence constante, qu'on appelle la *raison* de la ogression, est positive ou négative, suivant que la progres-on est croissante ou décroissante.

Soit la progression

$$\div\, a.b.c.\ldots\ldots\ldots\ldots i.k.l.$$

En désignant par δ la raison, par n le nombre des termes, par S leur somme, on aura les $(n-1)$ égalités

$$b=a+\delta,\ c=a+2\delta,\ldots\ldots\ l=a+(n-1)\,\delta.$$

Or $b=a+\delta$ et $k=l-\delta$, donc $a+l=b+k$. De même

$$b+k=c+i,\ldots.$$

Donc, *la somme des termes extrêmes égale celle de deux termes quelconques qui en sont également éloignés.*

Par conséquent, si après avoir écrit la progression, on la met au-dessous dans un ordre inverse, comme ci-après :

$$\begin{aligned} S&=a+b+c\ldots\ldots+i+k+l,\\ S&=l+k+i\ldots\ldots+c+b+a,\end{aligned}$$

en prenant la somme terme à terme, on aura autant de som-es partielles égales à $(a+l)$ qu'il y a de termes, c'est-à-dire n sommes. Ainsi

$$2S=n(a+l),\quad \text{d'où}\quad S=\frac{n}{2}(a+l).$$

Par conséquent, *dans une progression par différence, la somme des termes est égale à la demi-somme des termes extrêmes multipliée par le nombre des termes.*

Voyez, pour l'insertion des moyens par différence, la règle donnée dans notre Arithmétique (n° 154).

230. Les deux formules $l=a+(n-1)\delta$, $S=\frac{n}{2}(a+l)$ servent à déterminer deux des cinq quantités a, l, δ, n, S, lorsqu'on connaît les trois autres; ce qui donne lieu aux dix problèmes compris dans le tableau suivant, avec les formules relatives en regard :

Données.	Inconnues.	Formules.
1° a, δ, n	l, S	$l=a+(n-1)\delta$, $S=\frac{1}{2}n[2l-(n-1)\delta]$.
2° l, δ, n	a, S	$a=l-(n-1)\delta$, $S=\frac{1}{2}n[2l-(n-1)\delta]$.
3° a, n, l	δ, S	$\delta=\frac{l-a}{n-1}$, $S=\frac{1}{2}(a+l)$.
4° l, n, S	a, δ	$a=\frac{2S}{n}-l$, $\delta=\frac{2(nl-S)}{n(n-1)}$.
5° a, n, S	δ, l	$\delta=\frac{2(S-an)}{n(n-1)}$, $l=\frac{2S}{n}-a$.
6° a, δ, l	n, S	$n=\frac{l-a}{\delta}+1$, $S=\frac{(l+a)(l-a+\delta)}{2\delta}$.
7° a, l, S	n, δ	$n=\frac{2S}{a+l}$, $\delta=\frac{(l+a)(l-a)}{2S-(l+a)}$.
8° δ, n, S	a, l	$a=\frac{2S-n(n-1)\delta}{2n}$, $l=\frac{2S+n(n-1)\delta}{2n}$.
9° a, δ, S	n, l	$n=\frac{\delta-2a\pm\sqrt{(\delta-2a)^2+8\delta S}}{2\delta}$, $l=a+(n-1)\delta$.
10° l, δ, S	n, a	$n=\frac{\delta+2l\pm\sqrt{(\delta+2l)^2-8\delta S}}{2\delta}$, $a=l-(n-1)\delta$.

231. Dans ce qui précède, on n'a considéré que la somme des termes de la progression, mais il est facile d'évaluer, pour ces

mêmes termes, la somme de leurs puissances semblables, marquées par des exposants entiers positifs.

A cet effet, reprenons la progression générale

$$\div a.b.c.\dots\dots\dots\dots k.l,$$

dont la raison est δ.

On a $b=a+\delta, c=b+\delta, \dots\dots\dots l=k+\delta.$

Si l'on élève ces égalités à la puissance $m+1$, il vient

$$b^{m+1}=a^{m+1}+(m+1)\,a^m\delta+\frac{(m+1)m}{1.2}a^{m-1}\delta^2+\dots$$

$$c^{m+1}=b^{m+1}+(m+1)\,b^m\delta+\frac{(m+1)m}{1.2}b^{m-1}\delta^2+\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$l^{m+1}=k^{m+1}+(m+1)\,k^m\delta+\frac{(m+1)m}{1.2}k^{m-1}\delta^2+\dots$$

et en faisant la somme, on trouve, après les réductions,

$$l^{m+1}=a^{m+1}+(m+1)(a^m+b^m\dots+k^m)\delta$$
$$+\frac{(m+1)m}{1.2}(a^{m-1}+b^{m-1}\dots+k^{m-1})\delta^2+\dots$$

Si l'on désigne par S_m, $S_{m-1}\dots\dots$, les sommes des puissances $m, m-1\dots\dots$, des termes de la progression, il vient

$$l^{m+1}=a^{m+1}+(m+1)\delta(S_m-l^m)+\frac{(m+1)m}{1.2}\delta^2(S_{m-1}-l^{m-1})+\dots$$

d'où $$S_m=l^m+\frac{l^{m+1}-a^{m+1}}{(m+1)\delta}-\frac{m}{2}\delta(S_{m-1}-l^{m-1})$$
$$-\frac{m(m-1)}{2.3}\delta^2(S_{m-2}-l^{m-2})-\text{etc.}$$

Cette formule s'arrête d'elle-même, lorsqu'on arrive à un terme qui contient le facteur $m-m$ ou zéro; elle donne la somme S_m en fonction des sommes inférieures qu'il faut donc commencer par calculer de proche en proche. A cet effet, on pose d'abord $m=0$, ce qui donne S_0, et l'on fait successivement $m=1$, $m=2\dots$, ce qui donne $S_1, S_2\dots\dots$

Soit, par exemple, la progression formée par la suite des nombres naturels

$$\div 1.2.3.\dots\dots\dots n.$$

Il faudra poser $a=1$, $l=n$ et $\delta=1$, ce qui donnera

$$S_m = n^m + \frac{n^{m+1}-1}{m+1} - \frac{m}{2}(S_{m-1} - n^{m-1})$$
$$- \frac{m(m-1)}{2.3}(S_{m-2} - n^{m-2}) - \text{etc.};$$

et en faisant successivement $m=0$, $m=1$, $m=2$, etc., on aura

$$S_0 = n,$$
$$S_1 = n + \frac{n^2-1}{2} - \frac{(n-1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$S_2 = n^2 + \frac{n^3-1}{3} - \left(\frac{n^2+n}{2} - n\right) - \frac{(n-1)}{3}$$
$$= \frac{3n^2+2n^3+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

etc.

232. Voici maintenant plusieurs problèmes qu'on résout aisément au moyen de ce qui précède.

Problème I. *Un corps, qu'on abandonne à lui-même, tombe de* $4^m{,}9$ *dans la première seconde de sa chute, du triple dans la deuxième seconde, du quintuple dans la troisième, et ainsi de suite; on demande combien il mettra de temps à parcourir* 490 *mètres?*

On a la progression

$$\div 4{,}9 . 3\,(4{,}9) . 5\,(4{,}9) \ldots\ldots\ldots$$

et les valeurs

$$S=490,\ a=4{,}9,\ \delta=9{,}8;\ \text{donc}\ n=\sqrt{\frac{2S}{\delta}}=\sqrt{\frac{980}{9{,}8}}=10'',$$

et $l=93^m{,}1$.

233. Problème II. *Combien une horloge frappe-t-elle de coups à chaque tour de cadran?*

1° Si elle ne sonne que les heures, on a

$$S = 1+2+3\ldots\ldots+12 = 6.13 = 78.$$

2° Si elle sonne, en outre, un coup pour chaque demi-heure, on a

$$S = 2+3+4\ldots\ldots+13 = 90.$$

3° Si, outre les heures, elle sonne un coup pour les quarts, deux coups pour les demi-heures, et trois coups pour les trois quarts, on a

$$S = 150.$$

234. Problème iii. *Dans les arsenaux, les boulets de même calibre sont rangés par piles dites* triangulaires, quadrangulaires *ou* rectangulaires, *suivant que, dans la couche horizontale de boulets formant la base de la pile, les centres des boulets du pourtour font un* triangle équilatéral, *un* carré *ou un* rectangle. *La seconde couche est formée de boulets placés au-dessus des vides de la première, et ainsi de suite. On demande le nombre de boulets contenus dans chacune des trois espèces de piles?*

I. *Piles triangulaires.* Ces piles ont la forme d'une pyramide triangulaire dont la base est un triangle équilatéral et horizontal.

Soit n le nombre de boulets contenus dans un côté de la base ou première couche; la seconde couche sera un triangle équilatéral dont le côté aura $n-1$ boulets; de même le côté de la troisième couche aura $n-2$ boulets, ainsi de suite jusqu'à la dernière couche formant le sommet de la pile ou de la pyramide, et qui n'aura qu'un boulet. Il s'agit de calculer les sommes s_1, s_2, $s_3 \ldots\ldots s_n$ de boulets contenus dans les première, seconde, troisième...n^e couches horizontales, et d'en faire la somme S.

La somme s_1 des boulets de la première couche, dont le côté contient n boulets, est évidemment la somme des termes de la progression par différence

$$\div 1.2.3.........n$$

dont la raison est 1, et l'on a (231) $s_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Cette formule fera connaître la somme des boulets de chaque couche, en donnant à n la valeur relative au nombre de boulets contenus dans son côté.

Ainsi pour la dernière couche ou celle du sommet, où $n=1$, on a $s_n = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$; pour l'avant-dernière, où $n=2$, on a

$s_{n-1}=\frac{2(2+1)}{2}=3$; pour la suivante, où $n=3$, on a $s_{n-2}=\frac{3(3+1)}{2}=6$, et ainsi de suite. De sorte que le nombre total des boulets de la pile sera

$$S=\frac{1(1+1)}{2}+\frac{2(2+1)}{2}+\frac{3(3+1)}{2}\ldots\ldots+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(1^2+2^2+3^2\ldots+n^2)+\frac{1}{2}(1+2+3\ldots+n).$$

Or, d'après les formules du n° 231, on a

$$1+2+3\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

et $$1^2+2^2+3^2\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

donc $$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4},$$

ou enfin $$S=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Si $n=20$, on a $S=1540$.

II. *Piles quadrangulaires*. Ces piles ont la forme d'une pyramide quadrangulaire dont la base est un carré horizontal.

Soit n le nombre de boulets contenus dans un côté de la base ou première couche; la seconde couche sera de même un carré dont le côté aura $n-1$ boulets, ainsi de suite jusqu'à la dernière couche formant le sommet de la pile ou de la pyramide, et qui n'aura qu'un boulet.

Toutes ces couches étant ainsi des carrés décroissants, il est évident qu'on aura pour le nombre total des boulets de la pile

$$S=1^2+2^2+3^2\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Si $n=20$, on a $S=2870$.

III. *Piles rectangulaires*. Ces piles ont la forme d'un tronc de prisme triangulaire à bases égales et semblablement inclinées de dehors en dedans, la plus grande face étant un rectangle horizontal servant de base à la pile et faisant la première couche. La seconde couche est de même un rectangle ayant

un boulet de moins dans chacun de ses côtés, et ainsi de suite jusqu'à la dernière couche formant le sommet de la pile ou l'arête supérieure du prisme, laquelle est composée d'une seule file de boulets.

Soit $p+1$ le nombre de boulets contenus dans cette file; la couche suivante sera composée de deux files contenant chacune $p+2$ boulets, et en aura par conséquent $2(p+2)$; celle qui vient après sera composée de trois files contenant chacune $p+3$ boulets, et en aura donc $3(p+3)$, ainsi de suite; de sorte qu'en représentant par n le nombre de boulets d'un petit côté de la base, celle-ci en contiendra $n(p+n)$.

Le nombre total des boulets de la pile sera donc

$$S=(p+1)+2(p+2)+3(p+3).....+n(p+n)$$
$$=p(1+2+3.....+n)+(1^2+2^2+3^2.....+n^2).$$

Or, d'après les formules du n° 231, la première somme est

$$p\left[\frac{n(n+1)}{2}\right],$$

et la seconde est

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Donc

$$S=\frac{pn(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6};$$

ou bien, en désignant par m le nombre de boulets d'un grand côté de la base, comme $m=p+n$, il vient

$$S=\frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}.$$

Si $n=20$ et $m=30$, on a $S=4970$.

Remarque I. Dans les trois cas précédents, on obtient aisément le nombre des boulets de la pile au moyen de la règle suivante, plus facile à retenir que les formules qu'on vient d'établir.

Règle générale. *Le nombre des boulets de l'une quelconque des piles précédentes est égal au nombre de boulets d'une face triangulaire multiplié par le tiers de la somme des trois arêtes parallèles qui sont en dehors de cette face.*

grand, on pourra rendre aussi grand qu'on le voudra l'ensemble $1 + n\alpha$, et, à plus forte raison, q^n. Or, q^n étant un terme quelconque de la progression, il est évident que la somme S de tous les termes, qui sont d'ailleurs positifs, peut devenir aussi grande qu'on le voudra.

2° Soit $q = 1$. Alors on a $S = \frac{0}{0}$; mais comme la somme d'un certain nombre de termes est nécessairement déterminée, il est clair que le symbole $\frac{0}{0}$ ne doit exprimer qu'une indétermination apparente. En effet, si l'on effectue d'abord la division de $q^n - 1$ par $q - 1$, il vient

$$S = a\,(q^{n-1} + q^{n-2} \ldots\ldots + 1),$$

et en faisant $q = 1$, on a $S = na$. Ainsi tous les termes sont égaux au premier a.

3° Soit enfin $q < 1$, ou la progression décroissante. Alors la formule peut se mettre sous la forme

$$S = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Posons $q = \frac{1}{\beta}$, d'où $q^n = \frac{1}{\beta^n}$ et $\beta^n = \frac{1}{q^n}$. Comme β est > 1, on pourra, d'après ce qu'on vient de voir (1°), prendre n assez grand, pour que β^n soit aussi grand qu'on le voudra, et par conséquent $\frac{1}{\beta^n}$ ou q^n aussi petit qu'on le voudra. Ainsi, en faisant croître n indéfiniment, le numérateur de la fraction $\frac{aq^n}{1-q}$ approche indéfiniment de zéro, tandis que le dénominateur reste constant. Donc la fraction elle-même approche de plus en plus d'être égale à zéro, et par suite la somme S s'approche de la valeur $\frac{a}{1-q}$. Par conséquent, cette fraction est une limite vers laquelle la somme des termes d'une progression décroissante converge indéfiniment, à mesure qu'on prend plus de termes. Donc enfin, si $n = \infty$, on a rigoureusement

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Tant que le nombre des termes est fini, la valeur de S donnée par cette formule est trop grande de la quantité $\frac{aq^n}{1-q}$. Ainsi le résultat qu'elle fournit est d'autant plus près d'être exact, qu'on prend un plus grand nombre de termes.

Cette formule $S=\frac{a}{1-q}$ peut s'énoncer comme il suit :

La somme des termes d'une progression par quotient décroissante et prolongée à l'infini, est égale au quotient du premier terme divisé par l'unité moins la raison.

Ces sortes de progressions sont dites *convergentes.*

Si l'on a la progression $\div\!\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} \ldots$, on trouve $S=2$.

237. Les deux formules $l=aq^{n-1}$, $S=\frac{lq-a}{q-1}$ servent à déterminer deux des cinq quantités a, l, q, n, S, lorsqu'on connaît les trois autres, ce qui donne lieu aux dix problèmes compris dans le tableau ci-après, avec les formules en regard :

Données.	Inconnues.	Formules.
1° a, q, n	l, S	$l=aq^{n-1}$, $S=\frac{ql-a}{q-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$.
2° l, q, n	a, S	$a=\frac{l}{q^n-1}$, $S=\frac{l(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}$.
3° a, n, l	q, S	$q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$, $S=\frac{l\sqrt[n-1]{l}-a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}$.
4° l, n, S	q, a	$(S-l)q^{n-1}-l(q^{n-2}+q^{n-3}\ldots+1)=0$, $a=\frac{l}{q^n-1}$.
5° a, n, S	q, l	$q^{n-1}+q^{n-2}\ldots+1=\frac{S}{a}$, $l=aq^{n-1}$.
6° a, q, l	n, S	$S=\frac{ql-a}{q-1}$, $n=1+\frac{\log l-\log a}{\log q}$.

Données.	Inconnues.	Formules.
7° a, l, S	q, n	$q=\frac{S-a}{S-l}$, $n=1+\frac{\log l-\log a}{\log q}$.
8° q, n, S	a, l	$a=\frac{S(q-1)}{q^n-1}$, $l=\frac{Sq^{n-1}(q-1)}{q^n-1}$.
9° a, q, S	l, n	$l=\frac{a+S(q-1)}{q}$, $n=1+\frac{\log l-\log a}{\log q}$.
10° l, q, S	a, n	$a=lq-S(q-1)$, $n=1+\frac{\log l-\log a}{\log q}$.

Les quatrième et cinquième cas donneront chacun une équation du degré $n-1$ en q; nous verrons plus tard comment on traite ces équations. Quant aux cinq derniers cas, on ne les résout qu'à l'aide des logarithmes (voy. ci-après n° 252).

Remarque. On pourrait croire que la somme des puissances semblables des termes d'une progression par quotient donnerait lieu à de nouvelles formules, comme on l'a vu (231) pour les progressions par différence. Mais il n'en est pas de même ici. Car en élevant à la puissance n^e tous les termes de la progression

$$\div\!\div a : aq : aq^2 \ldots.$$

il vient

$$\div\!\div a^n : a^nq^n : a^nq^{2n} \ldots$$

progression de même espèce que la proposée.

SECTION III.

LOGARITHMES ET APPLICATIONS.

§ 1er. *Logarithmes. Formation et usages des tables.*

238. Nous avons exposé en Arithmétique (n° 162 à 177) la théorie complète et les propriétés des logarithmes, en les considérant avec Néper, leur inventeur, *comme les termes d'une*

progression par différence commençant par zéro, correspondants à la suite des nombres regardés comme faisant partie d'une progression par quotient commençant par l'unité.

Nous avons vu (Arith. nos 167 et 169) que les deux mêmes progressions, qui sont croissantes, étant prolongées indéfiniment à gauche des termes 1 et 0, donnent les logarithmes des nombres plus petits que 1, mais que ces logarithmes sont *négatifs*.

Ces deux progressions peuvent s'écrire ainsi :

$$\div\!\!\div \ldots \frac{1}{(1+\alpha)^2} : \frac{1}{1+\alpha} : 1 : 1+\alpha : (1+\alpha)^2 \ldots$$
$$\div \ldots \; -2\beta \; . \; -\beta \; . \; 0 \; . \; \beta \; . \; 2\beta \; \ldots$$

α étant une très-petite quantité qu'on peut diminuer de telle sorte, que les termes de la première progression puissent être regardés comme variant d'une manière continue et renfermant donc, sans erreur sensible, la suite des nombres naturels, au moins jusqu'à une certaine limite, par exemple jusqu'à 100000 ; et β étant de même une quantité qu'on peut supposer aussi petite qu'on le voudra. Mais, d'après la définition même des logarithmes, il est absolument de rigueur que le terme 0 de la seconde progression corresponde au terme 1 de la première, c'est-à-dire qu'on ait $\log 1 = 0$. De plus, comme elles croissent toutes deux jusqu'à l'infini, tandis qu'elles décroissent, la seconde jusqu'à l'infini négatif, et la première en tendant toujours vers zéro, on a donc aussi $\log \infty = \infty$ et $\log 0 = -\infty$.

Les deux progressions correspondantes pouvant varier d'une infinité de manières dans la succession continue de leurs termes, il peut donc exister une infinité de systèmes de logarithmes.

En général, on appelle *base* d'un système de logarithmes le nombre auquel correspond un certain logarithme déterminé, l'unité, par exemple. Dès que la base est donnée, le système de logarithmes est complétement déterminé.

Néper fut conduit à prendre pour base de son système, le nombre qu'on est convenu de représenter par e, dont la valeur est égale à 2,718281828..... ; et ses logarithmes ont été nommés logarithmes *népériens*, ou encore *hyperboliques*, parce qu'ils mesurent les parties de l'aire comprise entre une hyperbole équilatère et ses asymptotes. Mais il ne tarda pas

à reconnaître quel avantage on aurait à prendre le nombre 10, base de notre système de numération, pour base d'un système de logarithmes, parce qu'alors les multiplications et les divisions par 10, 100, 1000..., se réduiraient à des additions ou à des soustractions d'unités entières. Aussi ce fut avec son consentement que Briggs composa des tables de logarithmes calculés dans la base 10, et qui furent nommés *logarithmes de Briggs* ou *logarithmes vulgaires*. Ces tables ne furent publiées qu'en 1624 après la mort de Néper.

239. Puisque les termes des deux progressions précédentes (238) peuvent être considérés comme renfermant la suite des nombres naturels, l'un des termes de la seconde progression sera, dans tous les cas, sensiblement égal à l'unité, ou lui sera même rigoureusement égal, en disposant convenablement de β, de sorte qu'en représentant ce terme par $\mu\beta$, et par a le terme correspondant de la première progression, on aura en même temps les deux relations

$$\mu\beta = 1, (1+\alpha)^{\mu} = a, \quad \text{d'où} \quad \beta = \frac{1}{\mu} \quad \text{et} \quad 1+\alpha = a^{\frac{1}{\mu}} = a^{\beta}.$$

Alors les deux progressions pourront se mettre sous la forme

$$\div\!\div \ldots a^{-3\beta} : a^{-2\beta} : a^{-\beta} : 1 : a^{\beta} : a^{2\beta} \ldots$$
$$\div \ldots -3\beta . -2\beta . -\beta . 0 . \beta . 2\beta \ldots$$

D'où il résulte qu'en désignant par x un terme quelconque de la seconde, et par y le terme correspondant de la première, on aura toujours $y = a^x$.

Ainsi, *on peut encore considérer les logarithmes des nombres comme les exposants des puissances auxquelles il faut élever un nombre constant, qu'on appelle* base *du système, pour en déduire tous ces nombres.*

Afin de ne pas nous répéter, nous renverrons pour les propriétés des logarithmes à notre Arithmétique, où nous les avons établies en déduisant les logarithmes des progressions. Nous allons cependant rappeler les principales de ces propriétés, en employant la nouvelle définition ci-dessus, et nous adopterons, pour les exemples, les tables de Callet, qui sont plus étendues que celles de Lalande.

240. La théorie des logarithmes considérés comme déduits

de l'équation *exponentielle* $y = a^x$ repose sur ce principe, que *les puissances d'un nombre constant positif et différent de l'unité peuvent reproduire tous les nombres possibles;* c'est-à-dire que si dans l'équation $y = a^x$ on donne à x toutes les valeurs possibles, positives et négatives, on aura pour y toutes les grandeurs possibles entre zéro et l'infini.

1° Soit $a > 1$. Comme en faisant $x = 0$ et $x = 1$ on a $y = 1$ et $y = a$, si l'on donne à x des valeurs qui croissent par degrés insensibles depuis zéro jusqu'à 1 et depuis 1 jusqu'à l'infini, les valeurs correspondantes de y croîtront de même d'une manière continue de 1 vers a et de a jusqu'à l'infini, mais beaucoup plus rapidement que celles de x.

Si l'on attribue à x des valeurs négatives, on aura $y = a^{-x}$ ou $y = \frac{1}{a^x}$. Or, on vient de voir que si l'on donne à x toutes les valeurs positives à partir de zéro, a^x croît d'une manière continue depuis 1 jusqu'à l'infini. Donc alors le quotient $\frac{1}{a^x}$ décroît depuis 1 jusqu'à zéro. Ainsi les valeurs négatives de x, entre zéro et l'infini, donnent pour y toutes les valeurs possibles depuis 1 jusqu'à zéro.

2° Soit $a < 1$. Si l'on fait $a = \frac{1}{b}$, on a $b > 1$, et il vient $y = \frac{1}{b^x}$, ou $y = b^x$, suivant qu'on prend x positif ou négatif. On retombe donc dans le cas précédent, avec la seule différence que y décroîtra depuis 1 jusqu'à zéro, quand x croîtra positivement, et que y croîtra depuis 1 jusqu'à l'infini, quand x croîtra négativement.

3° Si $a = 1$, on a $y = 1$, quel que soit x.

Donc, pourvu que a soit autre que 1, il y a toujours une valeur de x qui rend a^x égal à un nombre donné y; or cette valeur de x est précisément le logarithme du nombre y, ce qui confirme la définition des logarithmes donnée ci-dessus (239).

Si l'on écrit $x = \log y$, la base a est sous-entendue, parce qu'une fois choisie, elle reste invariable. Si on la change, il faut indiquer la nouvelle base, et faire connaître le système de logarithmes dont il s'agit.

Ordinairement on désigne, dans les calculs, les logarithmes pris dans une base quelconque a par l'abréviation *log*, les logarithmes vulgaires par la lettre initiale L, et les logarithmes népériens par l'initiale l.

241. La composition d'une table de logarithmes consiste à déterminer toutes les valeurs de x qui répondent à

$$y=1, y=2, y=3\ldots\ldots,$$

dans l'équation $y=a^x$.

Si l'on suppose $a^\alpha=m$, en donnant à x les valeurs successives

$$0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha\ldots\ldots$$

on trouve que les valeurs correspondantes de y sont

$$1, m, m^2, m^3, m^4\ldots\ldots$$

Ainsi les logarithmes croissent en progression par différence, tandis que les nombres croissent en progression par quotient.

On peut donc regarder les systèmes de valeurs de x et de y qui satisfont à l'équation $y=a^x$, comme classés dans ces deux progressions, ce qui dénote une concordance parfaite entre les deux définitions des logarithmes (238, 239).

242. Les propriétés des logarithmes se déduisent aisément des règles données pour le calcul des exposants.

En effet, soient $x, x', x'',\ldots$ les logarithmes des nombres $y, y', y'',\ldots$, on aura

$$y=a^x,\quad y'=a^{x'},\quad y''=a^{x''}\ldots;$$

donc

$$1^\circ\ yy'y''\ldots=a^xa^{x'}a^{x''}\ldots=a^{x+x'+x''+\ldots}.$$

$$2^\circ\ \frac{y}{y'}=\frac{a^x}{a^{x'}}=a^{x-x'}.$$

$$3^\circ\ y^m=(a^x)^m=a^{mx}.$$

$$4^\circ\ \sqrt[m]{y}=\sqrt[m]{a^x}=a^{\frac{x}{m}}.$$

De là on conclut les propriétés connues. (V. notre Arith., n° 164.)

243. Pour calculer le logarithme d'un nombre quelconque donné b, il faut résoudre l'équation $a^x=b$, qu'on nomme *exponentielle*, parce que l'inconnue est en exposant.

1° Soient a et b tous deux >1. Si l'on met successivement à la place de x les nombres entiers 0, 1, 2, 3..., on parviendra

toujours à deux nombres consécutifs n et $n+1$, tels que b sera compris entre a^n et a^{n+1}, d'où l'on conclura que x se trouve entre n et $n+1$. Ainsi en posant $x=n+\frac{1}{y}$, y sera un nombre >1.

L'équation $a^x=b$ deviendra donc $a^{n+\frac{1}{y}}=b$, d'où l'on tire

$$a^{\frac{1}{y}}=\frac{b}{a^n}, \quad \text{et} \quad a=\left(\frac{b}{a^n}\right)^y.$$

Or le quotient de b divisé par a^n est compris entre 1 et a. On pourra donc déterminer, comme tout à l'heure, la valeur entière approchée de y, en mettant successivement à sa place les nombres 1, 2, 3...., et l'on trouvera que y est compris entre deux nombres consécutifs n' et $n'+1$; ainsi de suite. La valeur de x sera donc donnée par la fraction continue

$$x=n+\cfrac{1}{n'+\cfrac{1}{n''+\text{etc.}}}$$

et sera d'autant plus approchée que l'opération aura été poussée plus loin.

2° Si dans l'équation $a^x=b$ on a en même temps $a>1$ et $b<1$, la valeur de x devient négative (240, 2°). Alors en remplaçant x par $-y$, on a $\frac{1}{a^y}=b$, d'où $a^y=\frac{1}{b}$; et comme b est >1, on a $\frac{1}{b}>1$, ce qui ramène au premier cas.

3° Si l'on suppose $a<1$ et $b>1$, on trouve de même $\left(\frac{1}{a}\right)^y=b$; et comme $\frac{1}{a}$ est >1, on retombe donc également sur le premier cas.

4° Soit enfin $a<1$ et $b<1$; l'équation $a^x=b$ peut alors se mettre sous la forme $\left(\frac{1}{a}\right)^x=\frac{1}{b}$, ce qui ramène encore au premier cas, puisque $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sont tous deux >1.

244. Dans le système dont la base est 10, on sait que les logarithmes des nombres 1, 10, 100...., sont 0, 1, 2....; en

effet, $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$,... et, en général, $\log 10^m = m$. Quant aux logarithmes des autres nombres, ils sont donnés par les valeurs de x tirées des équations $10^x = 2$, $10^x = 3$....; mais il ne faut calculer ainsi que les logarithmes des nombres premiers, d'où l'on déduit, par de simples additions, ceux des nombres composés de facteurs premiers.

Nous donnons plus loin (430 et 431) des formules propres à obtenir les logarithmes de tous les nombres.

245. Quand on a calculé les logarithmes dans une base quelconque, il est facile de passer d'un système à un autre, c'est-à-dire d'obtenir les logarithmes dans le nouveau système. En effet, soit a la base du premier système, b celle du second, et x le logarithme d'un nombre n dans le système b, on aura $b^x = n$; et prenant les logarithmes des deux membres de cette équation dans le système connu a, il viendra

$$x \log b = \log n,$$

d'où
$$x = \frac{\log n}{\log b} = \frac{1}{\log b} \cdot \log n.$$

Donc *on obtiendra les logarithmes des nombres dans le nouveau système dont la base est* b, *en multipliant les logarithmes des mêmes nombres, dans le système dont la base est* a, *par la quantité constante* $\frac{1}{\log b}$, *log* b *étant pris dans la base* a.

Ce facteur constant $\frac{1}{\log b}$ se nomme le *module* de la nouvelle base b par rapport à la première base a. Nous donnons plus loin (431) la manière de le calculer, ainsi que sa valeur particulière lorsqu'on passe des logarithmes népériens aux logarithmes vulgaires.

246. Les tables de logarithmes servent principalement à résoudre les deux problèmes suivants : 1° *Étant donné un nombre, trouver son logarithme ;* 2° *étant donné un logarithme, trouver le nombre auquel il appartient.* Comme nous avons suffisamment traité ces deux questions, pour les tables de Lalande, dans notre Arithmétique (n° 171), nous allons nous

borner aux détails nécessités par l'emploi des tables plus complètes de Callet.

PROBLÈME I. *Étant donné un nombre quelconque* N, *trouver son logarithme?*

Les tables de Callet contiennent les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 108000, avec sept et quelquefois huit décimales. On y a supprimé la *caractéristique*, qui égale autant d'unités, moins une, que le nombre a de chiffres.

Ier CAS. *Soit le nombre* N *entier et* < 108000.

La première chiliade des tables de Callet contient les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 1200, et en regard les logarithmes correspondants avec huit décimales.

Après la première chiliade, on trouve, sans interruption, les nombres depuis 1200 jusqu'à 10800. La colonne à droite marquée o contient leurs logarithmes, et les espaces vides qu'on y remarque doivent être remplis par les 3 chiffres écrits en tête de chaque espace. Ainsi le logarithme de 5079 est 3,7057782.

Les logarithmes des nombres compris entre 10800 et 108000 sont donnés au moyen des colonnes marquées 1, 2, 3,.....9. D'abord, si le nombre est terminé par un zéro, son logarithme sera composé de la même partie décimale que le nombre donné divisé par 10 ou ayant un zéro de moins, la caractéristique étant seulement plus forte d'une unité. Ainsi le logarithme d'un nombre compris entre 10800 et 108000, et terminé par un zéro, est donné par la colonne marquée o; si le nombre est terminé par 1, son logarithme sera donné par la colonne marquée 1 contenant 4 décimales, à la gauche desquelles on ajoutera les 3 chiffres correspondants séparés dans la colonne zéro, parce que les logarithmes des nombres qui ne diffèrent que par le chiffre des unités ont les trois premières décimales communes. Si le nombre est terminé par l'un des chiffres 2, 3..... 9, les 4 décimales de droite de son logarithme seront également données par l'une des colonnes notées 2, 3.....9. Ainsi, pour avoir le logarithme du nombre 94158, on supprimera d'abord le chiffre des unités 8, on cherchera 9415 dans la colonne N, et suivant horizontalement jusqu'à la colonne marquée 8, on y trouvera 8572 pour les quatre der-

niers chiffres du logarithme cherché, dont les trois premiers 973 seront donnés par le nombre isolé le plus voisin, en remontant dans la colonne marquée zéro. Ajoutant la caractéristique 4, on aura donc

$$L\,94158 = 4{,}9739415.$$

IIe CAS. *Soit le nombre* N *entier et* > 108000.

Cherchons, par exemple, le logarithme de 3546897. On séparera deux chiffres sur la droite, pour que la partie restante à gauche ne soit pas > 108000 ; et l'on cherchera le logarithme du nombre 35468,97, qui, n'étant autre chose que le quotient du nombre proposé par 100, aura le même logarithme, à la caractéristique près, laquelle sera seulement plus petite de deux unités.

En prenant d'abord le logarithme de la partie entière 35468, et négligeant la caractéristique, on trouve

$$L\,35468 = 0{,}5498367.$$

Or, nous allons démontrer (248) le principe admis dans notre Arithmétique (n° 171) que *pour des nombres très-grands les différences entre les nombres sont sensiblement proportionnelles aux différences entre les logarithmes.* Cela posé, on voit dans la dernière colonne des tables, où se trouvent toutes calculées d'avance les différences entre les logarithmes, que la différence entre les logarithmes des nombres 35468 et 35469 est 123; alors pour avoir la différence qui correspond à 0,97, on pose la proportion

$$1 : 0{,}97 :: 123 : x, \text{ d'où } x = 123 . 0{,}97 = 119{,}31.$$

On peut aussi trouver la partie entière de x, dont on doit négliger la partie décimale plus petite qu'une unité décimale du septième ordre, au moyen de la colonne des parties proportionnelles, qui est placée dans les tables au-dessous de la différence 123. Car on a immédiatement

$$123 . 0{,}9 = 111,\ 123 . 0{,}07 = 8{,}6,$$

et par conséquent

$$123 . 0{,}97 = 111 + 8 = 119.$$

En ajoutant 119 au logarithme ci-dessus et mettant la carac-

téristique, on trouve

$$L\ 3546897 = 6,5498486.$$

Voici l'ensemble du calcul

N = 3546897,		
L 35468	....	0,5498367
Pour 0,9	....	111
pour 0,07	....	8
L 3546897	....	6,5498486

IIIe et IVe cas. Si le nombre N est fractionnaire ou contient des parties décimales, on opère comme il a été expliqué dans notre Arithmétique (n° 171, 3° et 4°).

247. Problème ii. *Étant donné un logarithme* L, *trouver le nombre auquel il appartient?*

Ier cas. *On demande le nombre correspondant à un logarithme dont la partie décimale est positive.*

Supposons d'abord que la partie décimale se trouve dans les tables, et que tout le logarithme soit positif.

Soit L = 6,8991856. On prend la partie des tables qui dépasse 10800, et l'on cherche à la colonne 0 le logarithme 8991635 qui est le plus près d'atteindre la partie décimale du logarithme donné; s'avançant alors horizontalement jusqu'à la colonne 4, on trouve 1856, qui, avec les trois premiers chiffres 899, forment la partie décimale de L. Prenant ensuite la colonne N, on trouve en regard le nombre 7928, et ajoutant 4 on a 79284, qui serait le nombre cherché, si la caractéristique était 4; mais comme elle est 6, il faut multiplier 79284 par 100, ce qui donne 7928400 pour le nombre demandé.

Si, au lieu de 6, la caractéristique était 2, il faudrait diviser 79284 par 100, c'est-à-dire mettre 2 chiffres en décimales, ce qui donnerait 792,84 pour le nombre cherché.

Si enfin la caractéristique est seule négative comme dans le logarithme $\bar{2},8991856$, la différence de -2 à 4 étant 6, il faudra diviser par 10^6 le nombre 79284 trouvé comme ci-dessus, et qui a 4 pour caractéristique, de sorte que le nombre demandé sera 0,079284.

Supposons maintenant que la partie décimale ne se trouve pas dans les tables, et qu'on ait $L = 3,8722168$. En cherchant, comme ci-dessus, la partie décimale, on trouve qu'elle est comprise entre 8722146 et 8722204 qui correspondent aux deux nombres 74510 et 74511, en négligeant d'abord l'ordre des unités. Comme la différence tabulaire la plus voisine 59 correspond à l'unité de différence qui existe entre ces nombres, et que la partie décimale du logarithme donné surpasse de 22 celle du plus petit nombre, on peut, d'après le principe admis tout à l'heure, que les accroissements des nombres très-grands sont proportionnels aux accroissements des logarithmes, poser la proportion

$$59 : 22 :: 1 : x, \text{ d'où } x = \frac{22}{59} = 0,37.$$

Ainsi, en négligeant toujours l'ordre des unités, le nombre cherché sera 7451037. Mais comme il ne doit avoir que quatre chiffres à la partie entière, puisque la caractéristique est 3, le nombre sera 7451,037.

On peut éviter ce calcul au moyen des parties proportionnelles écrites dans les tables au-dessous de la différence 59. Car la partie 18, immédiatement inférieure à la différence 22, correspond à 3, et il y a 4 pour reste. Ajoutant un zéro à 4, on a 40 qui est très-voisin de 41, lequel correspond à 7; par conséquent on obtient les mêmes chiffres 7451037 que ci-dessus, pour ceux du nombre cherché, qui est donc 7451,037 en ayant égard à la caractéristique 3.

Le calcul se dispose ainsi qu'il suit :

$LN = 3,8722168$,		
pour	0,8722146	74510
1er reste	22	03
2e reste	4	007
N ou nombre cherché..		7451,037.

IIe CAS. *On demande le nombre correspondant à un logarithme entièrement négatif.*

Soit $L = -2,0739748$. On ajoutera $+3$ et -3 à ce loga-

rithme, ce qui donnera

$L = -3 + (3 - 2{,}0739748) = -3 + 0{,}9260252 = \bar{3}{,}9260252.$

Opérant alors comme ci-dessus, dans le cas des logarithmes à caractéristique seule négative, on trouve 0,008433836 pour le nombre cherché.

On voit que ce procédé consiste à rendre positive la partie décimale du logarithme donné.

148. Pour résoudre les deux questions précédentes, nous avons admis le principe que *pour les nombres très-grands les accroissements des nombres sont proportionnels aux accroissements des logarithmes*. Or ce principe n'est pas rigoureusement exact, mais donne seulement une approximation presque toujours suffisante, et d'autant plus grande que les nombres auxquels on l'applique sont plus considérables. Voici comment on peut le démontrer, en n'employant que la formule du binôme dans le cas de l'exposant entier positif.

Soit a et $a+1$ deux nombres entiers consécutifs.

Posons
$$\sqrt[n]{1+\frac{1}{a}} = 1+\alpha,$$
d'où l'on tire
$$(1+\alpha)^n = 1+\frac{1}{a} = \frac{a+1}{a}.$$

En prenant les logarithmes, et représentant par δ la différence des tables, on a
$$n\log(1+\alpha) = \log(a+1) - \log(a) = \delta,$$
d'où
$$\log(1+\alpha) = \frac{\delta}{n}.$$

Maintenant, soit m un nombre entier positif plus petit que n; alors $a(1+\alpha)^m$ sera $>a$ et $<a+1$. Donc si l'on pose $a(1+\alpha)^m = a+z$, on aura, au moyen de la formule du binôme dans le cas de l'exposant entier positif,

$$(1)\quad a+z = a(1+\alpha)^m = a\left(1+m\alpha+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2+\text{etc.}\right),$$
et
$$(2)\quad a+1 = a(1+\alpha)^n = a\left(1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2+\text{etc.}\right).$$

L'équation (1) donne

$$(3)\quad z = a\left(m\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2 + \text{etc.}\right),$$

et l'équation (2) donne aussi

$$(4)\quad 1 = a\left(n\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2 + \text{etc.}\right).$$

En divisant l'équation (3) par l'équation (4), on a

$$(5)\quad z = \frac{m + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha + \text{etc.}}{n + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha + \text{etc.}} = \frac{m}{n}\left(\frac{1 + \frac{m-1}{2}\alpha + \text{etc.}}{1 + \frac{n-1}{2}\alpha + \text{etc.}}\right).$$

Or, l'équation (4) montre que $an\alpha$ est < 1, ou $\alpha < \frac{1}{na}$. Si donc on pose $\alpha = \frac{t}{an}$, t sera < 1, et, en substituant cette valeur dans l'équation (5), il viendra

$$z = \frac{m}{n}\left(\frac{1 + \frac{m-1}{2}\cdot\frac{t}{an} + \text{etc.}}{1 + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{t}{an} + \text{etc.}}\right).$$

Si a est un nombre très-considérable, $\frac{1}{2a}$ sera une quantité fort petite; de plus, comme $\frac{m-1}{2an}$ est $< \frac{1}{2a}$, et que t est < 1, il est clair que le second terme du numérateur sera extrêmement petit, et que les termes suivants seront encore bien moindres. Par une raison semblable les termes du dénominateur qui viennent après 1 seront de même extrêmement petits. On aura donc, à très-peu près $z = \frac{m}{n}$.

Or l'équation (1) donne

$$\log(a + z) = \log a + m \log(1 + \alpha).$$

Donc en mettant au lieu du dernier logarithme sa valeur $\frac{\delta}{n}$, et au lieu de z sa valeur $\frac{m}{n}$, il vient

$$\log\left(a + \frac{m}{n}\right) = \log a + \frac{m}{n}\delta.$$

Mais $\frac{m}{n}$ est l'accroissement du nombre a, et $\frac{m}{n}\delta$ est l'accroissement du logarithme log a.

Donc *l'accroissement du nombre est proportionnel à l'accroissement du logarithme.*

Si l'on veut connaître les limites de l'approximation sur laquelle on peut compter en faisant usage des tables de logarithmes, il faut recourir à l'emploi des séries. (Voy. à ce sujet une note de M. Vincent qui termine l'Algèbre de M. Reynaud.)

249. Le calcul des logarithmes offre, outre l'inexactitude de la proportion précédente, une autre cause d'erreur provenant de ce que les tables donnent pour les logarithmes, et pour leurs différences, des valeurs seulement approchées, et pouvant être fautives d'une demi-unité décimale du septième ordre, soit en plus, soit en moins. Aussi les différences tabulaires ne peuvent jamais donner plus de deux chiffres exacts, et souvent même elles n'en donnent qu'un seul.

250. Nous avons fait voir dans notre Arithmétique (n° 174) comment on peut simplifier le calcul des logarithmes par l'emploi des compléments arithmétiques, et nous avons donné (n°s 175 et 176) des exemples auxquels nous renvoyons pour ne pas nous répéter.

§ 2. *Applications aux équations exponentielles et aux intérêts composés.*

251. Proposons-nous, comme application des logarithmes, de résoudre les équations exponentielles suivantes :

1° Soit l'équation $\left(\frac{215}{18}\right)^x = \frac{358}{87}$, où il faut déterminer l'inconnue x. En prenant les logarithmes vulgaires des deux membres, on a successivement

$$x\mathrm{L}\,\frac{215}{18} = \mathrm{L}\,\frac{358}{87},$$

$$x(\mathrm{L}\,215 - \mathrm{L}\,18) = \mathrm{L}\,358 - \mathrm{L}\,87,$$

d'où

$$x = \frac{\mathrm{L}\,358 - \mathrm{L}\,87}{\mathrm{L}\,215 - \mathrm{L}\,18}.$$

Cherchant dans les tables les logarithmes indiqués, on a

L 358 = 2,5538830	L 215 = 2,3324385
L 87 = 1,9395193	L 118 = 2,0718820
Différence 0,6143637	Différence 0,2605565.

Donc
$$x = \frac{6143637}{2605565}.$$

Pour calculer x par logarithmes, on retranche du logarithme du numérateur celui du dénominateur, et l'on cherche le nombre correspondant à la différence. Voici le tableau de l'opération :

L 61436 ...0,7884229	L 26055 ...0,4158911
pour 0,3 ... 21	pour 0,6 ... 100
pour 0,07... 50	pour 0,05... 84
L 6143637 = 6,7884255	L 2605565 = 6,4159019
L 2605565 = 6,4159019	
Lx = 0,3725236.	

Maintenant pour 0,3725070 on a... 23578
1er reste 166 09
x = 2,35789

Ainsi la valeur de x est 2,35789.

Quand le calcul donne 7 chiffres pour la valeur de x, on conserve seulement les 6 premiers, qui sont les seuls sur l'exactitude desquels on puisse compter, lorsqu'on revient des logarithmes aux nombres.

2° On peut s'exercer à résoudre l'équation

$$(1,00125)^x = 0,89625$$

qui donne $x = -87,6881$.

3° Soit l'équation $a^{b^x} = c$, où l'inconnue x indique la puissance à laquelle il faut élever l'exposant connu b d'une quantité a, pour que le résultat soit égal à la quantité c.

Si l'on prend les logarithmes des deux membres, en considérant b^x comme l'exposant de a, il vient

$$b^x \mathrm{L}a = \mathrm{L}c, \quad \text{d'où} \quad b^x = \frac{\mathrm{L}c}{\mathrm{L}a}.$$

Comme $\mathrm{L}\,a$ et $\mathrm{L}\,c$ sont des nombres décimaux dont les tables fournissent les logarithmes, on peut donc prendre encore les logarithmes des deux membres de l'équatiou précédente, ce qui donne

$$x\,\mathrm{L}\,b = \mathrm{L}\,\frac{\mathrm{L}\,c}{\mathrm{L}\,a} = \mathrm{L}\,\mathrm{L}\,c - \mathrm{L}\,\mathrm{L}\,a,$$

d'où

$$x = \frac{\mathrm{L}\,\mathrm{L}\,c - \mathrm{L}\,\mathrm{L}\,a}{\mathrm{L}\,b}.$$

Les équations $a^x = b$, $a^{b^x} = c$, $a^{b^{c^x}} = d, \ldots$ s'appellent équations exponentielles du premier ordre, du second ordre, du troisième ordre..., et peuvent toutes se résoudre d'une manière analogue. Mais dans la pratique, on obtiendra pour x des valeurs d'autant moins exactes que l'inconnue appartiendra à une équation exponentielle d'un ordre plus élevé, parce que les logarithmes primitifs se trouvant, dans les tables, affectés d'une certaine erreur, les logarithmes successifs seront de plus en plus fautifs.

252. Nous avons donné (237) les formules servant à résoudre toutes les questions relatives aux progressions par quotient. L'emploi des logarithmes semble indispensable pour calculer la valeur de l'inconnue lorsqu'elle est en exposant, comme dans les 6e, 7e, 9e et 10e cas, où l'inconnue n doit être donnée par l'équation $l = aq^{n-1}$. En prenant les logarithmes des deux membres, on a

$$\log l = \log a + (n-1)\log q,$$

d'où

$$n = 1 + \frac{\log l - \log a}{\log q},$$

ce qui justifie les formules données plus haut pour les cas dont il s'agit.

Les logarithmes sont encore très-utiles pour calculer les formules du 3e cas,

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}, \quad \mathrm{S} = \frac{l\sqrt[n-1]{l} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{l} - \sqrt[n-1]{a}}.$$

Car, pour la première, on a $\log q = \dfrac{\log l - \log a}{n-1}$, et lorsqu'on

aura trouvé la valeur de $\log q$, il ne restera plus qu'à chercher le nombre correspondant.

Pour la seconde, en divisant les deux termes par $\sqrt[n-1]{a}$, on a

$$S = \frac{l\sqrt[n-1]{l} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{l} - \sqrt[n-1]{a}} = a\left[\frac{\sqrt[n-1]{\left(\frac{l}{a}\right)^n} - 1}{\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}} - 1}\right];$$

posant $\sqrt[n-1]{\left(\frac{l}{a}\right)^n} = u$, et observant que $\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}} = q$, il vient

$$S = \frac{a(u-1)}{q-1}.$$

Il reste à calculer les racines u et q, qui sont données par les équations $\log u = \frac{n(\log l - \log a)}{n-1}$, et $\log q = \frac{\log l - \log a}{n-1}$.

253. Comme nous avons traité dans notre Arithmétique (nos 205 et 210) un certain nombre de questions relatives aux intérêts simples et composés, nous nous bornerons à reprendre ici la question des intérêts composés dans toute sa généralité.

Problème 1. *On place une certaine somme à intérêts composés, et tous les ans on ajoute une nouvelle somme qu'on joint au capital de cette année; quel est au bout d'un certain nombre* n *d'années le montant de tous les capitaux accumulés avec leurs intérêts composés?*

Soient a, b, c, d... l, les sommes placées au commencement de la première, de la seconde, de la troisième, de la quatrième..., de la n^e année, r l'intérêt d'un franc par an, et S la somme qu'on doit recevoir au bout de n années.

La somme a, qui reste placée pendant n années, vaudra $a(1+r)$ à la fin de la première année, $a(1+r)^2$ à la fin de la seconde année,... $a(1+r)^n$ au bout de n années. La somme b, qui ne reste placée que pendant $n-1$ années, vaudra, après cette époque, $b(1+r)^{n-1}$. La somme c, qui ne reste placée que pendant $n-2$ années, vaudra, après cette époque, $c(1+r)^{n-2}$; ainsi de suite, jusqu'à la dernière l qui, n'étant placée que pendant un an, deviendra seulement $l(1+r)$.

On aura donc

$$S=a(1+r)^n+b(1+r)^{n-1}+c(1+r)^{n-2}\ldots+l(1+r).$$

Dans le cas particulier où $a=b=c\ldots=l$, il vient

$$S=a[(1+r)^n+(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}\ldots+(1+r)],$$

où le second facteur est la somme des termes d'une progression par quotient composée de n termes, dont le premier et la raison sont $(1+r)$. On a donc (236)

$$S=\frac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}.$$

Cette formule, contenant les quatre quantités S, a, r, n, fera connaître l'une d'entre elles au moyen des trois autres.

PROBLÈME II. *On a emprunté une somme* A, *qu'on doit rembourser au moyen d'un nombre* n *d'*annuités, *c'est-à-dire, de sommes égales qu'on doit payer d'année en année; connaissant le taux* r *de l'intérêt, on demande la valeur ou la* quotité *de l'annuité?*

Soit a la quotité de l'annuité. Pour résoudre la question, il faut d'abord chercher ce que le capital A et les annuités successives a valent au bout de n années, puis égaler la première valeur à la somme des autres.

Or, au bout de n années le capital A vaudra $A(1+r)^n$; à la même époque, la première annuité, qui se paye un an après le jour de l'emprunt, vaudra $a(1+r)^{n-1}$; de même la seconde annuité vaudra $a(1+r)^{n-2}$; ainsi de suite jusqu'à la dernière annuité qui sera seulement a. On aura donc

$$A(1+r)^n=a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}\ldots+a.$$

Or le second membre est la somme des termes d'une progression par quotient composée de n termes, dont la raison est $(1+r)$. On aura donc

$$A(1+r)^n=\frac{a[(1+r)^n-1]}{r},$$

d'où

$$a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

Cette formule qui contient les quatre quantités A, a, r, n, fera connaître l'une d'entre elles au moyen des trois autres.

Soit $A = 1$, $r = 0{,}05$, $n = 10$, la formule donne

$$a = \frac{0{,}05(1{,}05)^{10}}{(1{,}05)^{10} - 1} = \frac{81445}{628894} = 0{,}1295.$$

C'est ce qu'il faut payer par an pour éteindre en 10 ans un dette de 1 fr.

255. **Problème III.** *Un banquier, devant une somme* a *payabl dans* n *années, donne en payement un effet de valeur* b *payable dans* p *années. Combien doit-il donner ou recevoir e retour de son échange?*

En considérant la somme que doit le banquier comme un capital qui devient a au bout de n années, ce capital ne vaut, lors de la transaction, que $\frac{a}{(1+r)^n}$. Pareillement l'effet b ne vaut à la même époque que $\frac{b}{(1+r)^p}$. La différence $\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p}$ marquera donc, selon qu'elle sera positive ou négative, ce que le banquier doit donner ou recevoir en retour; et si ce retour ne peut se payer qu'au bout de q années, il deviendra

$$\left(\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p}\right)(1+r)^q = a(1+r)^{q-n} - b(1+r)^{q-p}.$$

SECTION IV.

THÉORIE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR (*).

—

§ 1er. *Facteurs premiers des quantités algébriques.*

256. Nous avons défini en général (fin du n° 5) les quantités entières et les quantités rationnelles. Les définitions établies

(*) La théorie du plus grand commun diviseur, n'ayant d'application que dans la théorie générale des équations, est ici mieux placée qu'après la division.

pour les nombres dans notre Arithmétique (n° 36) sont également applicables aux quantités algébriques entières. Ainsi, l'on dit que toute quantité entière est *première*, lorsqu'elle n'est divisible que par elle-même et par l'unité. Telle est l'expression $a - b^2$. Mais l'expression $a^2 - b^2$ n'est pas première, parce que, étant divisée par $a - b$, elle donne pour quotient $a + b$. De plus, deux quantités entières sont dites *premières entre elles*, lorsqu'il n'existe aucune quantité entière, autre que l'unité, qui les divise exactement l'une et l'autre. Telles sont les expressions $a^2 - b^2$, $a^2 + b^2$.

Nous avons démontré en Arithmétique (nos 43 et 62) le principe sur lequel est basée la méthode du plus grand commun diviseur, savoir que *tout nombre premier, qui divise le produit de deux facteurs, divise l'un de ces facteurs.* En Algèbre, la méthode du plus grand commun diviseur est aussi fondée sur un théorème analogue, démontré pour la première fois par M. Lefebvre de Fourcy, dans son *Traité sur le plus grand commun diviseur et la théorie de l'élimination.* C'est un perfectionnement dont la science est redevable à ce savant, qui a bien voulu nous remettre un exemplaire de cet opuscule très-remarquable, auquel nous empruntons la démonstration suivante.

257. THÉORÈME I. *Toute quantité première* P, *qui divise le produit de deux quantités entières*, A *et* B, *doit diviser l'une d'entre elles.*

Supposons d'abord que les quantités A, B, P, ne contiennent pas plus d'une lettre, ce qui conduit aux quatre cas suivants.

Ier CAS. *Une seule des quantités* A *et* B *est fonctions de* x, *l'autre est numérique, ainsi que* P.

Soit $A = ax^\alpha + bx^\beta +$ etc., où les lettres a, b,... sont des nombres entiers, et les exposants α, β,... entiers positifs. En multipliant A par le nombre B, on a

$$AB = Bax^\alpha + Bbx^\beta + \text{etc.}$$

Or le produit AB étant divisible par le nombre premier P, chacun des coefficients Ba, Bb,... sera également divisible par P. Donc si P ne divise pas B, il devra diviser tous les nombres

a, b,.... et par conséquent le polynôme A. Donc P doit nécessairement diviser l'une des deux quantités A, B.

IIe CAS. *Les deux quantités* A *et* B *sont fonctions de* x, P *est numérique.*

Supposons que P, qui divise le produit AB, ne divise ni A, ni B. Concevons le polynôme A décomposé en deux polynômes A', A'', dont le premier A' ait tous ses coefficients multiples de P, et dont le second A'' n'ait que des coefficients non divisibles par P; on aura $A = A' + A''$. Opérons de même sur le polynôme B, et soit $B = B' + B''$; on aura

$$AB = (A' + A'')(B' + B'') = A'B' + A''B' + A'B'' + A''B''.$$

Les trois premières parties de ce produit sont divisibles par P, puisque tous les coefficients de A' et de B' sont des multiples de P. Donc P, qui par hypothèse divise AB, doit aussi diviser $A''B''$, et par conséquent tous les coefficients de ce produit. Or, si l'on représente par ax^{α}, bx^{β} les termes de plus haut exposant en x dans A'' et B'', le terme $abx^{\alpha+\beta}$ du plus haut exposant en x, dans le produit $A''B''$, ne pourra se réduire avec aucun autre. Mais ce même terme n'est pas divisible par P, qui, par hypothèse, ne divise ni a, ni b. Donc il est impossible que le nombre premier P, qui divise le produit AB, ne divise ni A, ni B.

IIIe CAS. *La quantité* P *et l'une des quantités* A, B, *sont fonctions de* x, *l'autre est numérique.*

Soit A fonction de x, et Q le quotient de AB par P, lequel est, par hypothèse, une quantité entière. On aura $AB = PQ$, ou, en nommant F, F', F'',... les facteurs premiers du nombre B,

$$AFF'F''\ldots = PQ.$$

Le premier membre de cette égalité étant divisible par F, le second doit l'être aussi. Donc, d'après les cas précédents, P ou Q sera divisible par le nombre premier F. Mais P, étant une quantité première qui contient x, ne peut être divisible par aucun nombre. Ainsi Q doit être divisible par F, et en désignant le quotient par Q', on aura

$$AF'F''\ldots\ldots = PQ'.$$

On prouvera de même que Q′ doit être divisible par F′, et en continuant ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les facteurs premiers de B, on parviendra à une égalité telle que $A = PQ_1$, où Q_1 doit encore être une quantité entière; d'où il résulte que A est divisible par P.

IV[e] cas. *Les trois quantités* A, B, P, *sont fonctions de* x.

Supposons que P ne divise pas A, et qu'après avoir ordonné les deux polynômes selon les puissances décroissantes de x; le degré de P ne surpasse pas celui de A. Effectuons la division de A par P jusqu'à ce qu'on obtienne un reste de degré moindre que P. Le quotient, toujours entier par rapport à x, pourra d'ailleurs contenir des coefficients fractionnaires. Imaginons qu'on ait réduit au même dénominateur M tous les termes du quotient et du reste, qu'on peut alors représenter par $\frac{Q}{M}$ et $\frac{A'}{M}$, Q et A′ étant deux quantités entières; de sorte qu'on aura

$$A = P\frac{Q}{M} + \frac{A'}{M}, \quad \text{ou bien} \quad MA = PQ + A'.$$

Or A′ ne peut être nul; car alors le polynôme premier P diviserait le produit MA, et par conséquent le polynôme A (3[e] cas), ce qui est contre l'hypothèse.

Multipliant les deux membres de la dernière égalité par B et les divisant ensuite par P, on a

$$M\frac{AB}{P} = PQ + \frac{A'B}{P};$$

d'où il suit que P, qui divise AB, doit aussi diviser A′B.

Supposons la quantité A′ algébrique, et divisons P par A′, jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste de degré moindre que A′; en nommant M′ le nombre par lequel il faudra multiplier P pour obtenir ce reste sans fractions, Q′ le quotient, A″ le reste, on aura

$$M'P = A'Q' + A''.$$

A″ ne peut être nul; car alors chaque facteur premier algébrique de A′ diviserait M′P, et par conséquent P (3[e] cas), ce qui est impossible.

Multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par B, et

les divisant ensuite par P, il vient

$$M'B = \frac{A'B}{P}Q' + \frac{A''B}{P};$$

d'où il suit que P, qui divise A'B, doit aussi diviser A''B.

Soit encore A'' une quantité algébrique; en divisant P par A'' et opérant comme ci-dessus, on obtiendra une nouvelle égalité analogue aux précédentes,

$$M''P = A''Q'' + A''', \quad \text{d'où} \quad M''B = \frac{A''B}{P}Q'' + \frac{A'''B}{P};$$

ainsi P, qui divise A''B, doit aussi diviser A'''B.

Continuant à opérer de même, on obtiendra des restes successifs A', A'', A'''...., de degrés décroissants. Comme aucun reste algébrique ne peut diviser exactement P, et qu'on ne peut avoir un reste nul immédiatement après un reste fonction de x, on est certain d'arriver à un reste numérique A_r; or on a prouvé que P doit diviser tous les produits successifs A'B, A''B, A'''B..., il divisera donc aussi A_rB et par conséquent B (3e cas).

258. *Remarque* I. Si P était d'un degré plus élevé que A, on aurait à diviser P par A, et non A par P; mais la démonstration resterait identiquement la même.

Remarque II. Si l'on suppose que les quantités A, B, P, peuvent contenir deux lettres x et y, on aura les quatre cas suivants à considérer :

1° *Un seul des facteurs* A *et* B *contient la lettre* x, *et* P *ne la contient pas.*

2° *Les deux facteurs* A *et* B *contiennent la lettre* x, *et* P *ne la contient pas.*

3° *Un seul des facteurs* A *et* B *contient la lettre* x, *et* P *la contient aussi.*

4° *Les deux facteurs* A *et* B *contiennent, ainsi que* P, *la lettre* x.

Ces quatre nouveaux cas se démontrent exactement comme les quatre premiers; seulement les quantités qu'on y supposait numériques peuvent être ici des quantités algébriques en y.

Si les quantités A, B, P peuvent contenir trois lettres, on dé-

montrera le théorème au moyen des cas précédents où ils ne peuvent contenir que deux lettres, de même qu'on démontre ceux-ci à l'aide des premiers cas où ces quantités ne peuvent contenir qu'une lettre; et ainsi de suite, quel que soit le nombre des lettres. Le théorème doit donc être regardé comme démontré dans toute sa généralité.

259. Théorème II. *Une quantité littérale ne peut se décomposer que d'une seule manière en facteurs premiers; ou, ce qui revient au même, deux produits de facteurs premiers ne peuvent être égaux que lorsqu'ils sont composés de facteurs égaux chacun à chacun.*

Soient ABCD..., $abcd$... deux produits égaux de facteurs premiers. Si le facteur a du premier produit est différent de tous les facteurs A, B, C,... du second, il ne pourra diviser aucun d'eux. Or, d'après le théorème précédent, a ne divisant ni A, ni B, ne divisera pas leur produit AB; ne divisant ni AB, ni C, il ne divisera pas leur produit ABC, ni par suite le produit ABCD..., ce qui est absurde, puisque ABCD.. $= abcd$... Donc le facteur a doit être égal à l'un des facteurs A, B, C, D,... Soit $a =$ A; divisant par a les deux produits donnés, on aura BCD... $= bcd$..., et en raisonnant comme ci-dessus, on prouvera que le facteur B doit être égal à l'un des facteurs, B, C, D,... ainsi de suite. Donc les produits égaux $abcd$..., ABCD... sont composés des mêmes facteurs premiers.

260. *Remarque* I. Si l'on remplace les lettres par des facteurs premiers numériques, on obtient le théorème suivant:

Un nombre ne peut se décomposer que d'une seule manière en facteurs premiers.

261. *Remarque* II. Il suit aussi de là que *la racine d'un degré quelconque d'une quantité entière ne peut être fractionnaire* (186).

§ 2. *Plus grand commun diviseur des quantités algébriques.*

262. *Le plus grand commun diviseur de plusieurs quantités algébriques entières est le produit de tous leurs facteurs premiers communs, soit numériques, soit littéraux.*

Lorsque les quantités dont on demande le plus grand commun diviseur sont des monômes, il faut chercher le plus grand commun diviseur des coefficients numériques d'après la règle donnée en Arithmétique (n° 46), et placer à la suite de ce nombre les lettres communes aux monômes proposés, en donnant à chacune le plus petit exposant dont elle y est affectée.

On trouve ainsi que le plus grand commun diviseur des monômes $48a^3bc^5d^2$, $36a^5bc^4d^3$, $24a^4b^3c^3d^4$, est $12a^3bc^3d^2$.

263. Voyons maintenant comment il faut opérer pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers M et N. On cherchera d'abord, comme on vient de l'indiquer, le plus grand commun diviseur m de tous les termes de M, le plus grand commun diviseur n de tous les termes de N, puis celui de m et de n, qui est évidemment le produit de tous les facteurs monômes communs aux polynômes M et N. Divisant alors M par m et N par n, on aura deux quotients entiers A et B qui ne renfermeront plus que les facteurs polynômes de M et de N; et lorsqu'on aura déterminé le plus grand commun diviseur des polynômes quotients A et B, il est clair qu'en le multipliant par celui des monômes m et n, on aura le plus grand commun diviseur des polynômes proposés.

Soit, par exemple,

$$M = 6ab^3x^5 - 18a^2b^3x^4 + 12a^3b^3x^3 - 18a^4b^3x^2 + 6a^4b^5x,$$
$$N = 24ax^4 - 84a^2x^3 + 68a^3x^2 - 12a^4x.$$

Le plus grand commun diviseur des termes de M est $6ab^3x$, celui des termes de N est $12ax$, enfin celui des monômes $6ab^3x$ et $12ax$ est $6ax$. Divisant M par $6ab^3x$, et N par $12ax$, on trouve les quotients

$$A = x^4 - 3ax^3 + 2a^2x^2 - 3a^3x + a^4,$$
$$B = 2x^3 - 7ax^2 + 5a^2x - a^3,$$

et si l'on représente par D le plus grand commun diviseur des polynômes A et B, celui des polynômes M et N sera $6aDx$.

264. La recherche du plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers M et N est ainsi ramenée à celle de deux polynômes entiers A et B qui n'ont plus de facteurs monômes.

D'abord il n'y a lieu à chercher le plus grand commun diviseur de deux polynômes que lorsqu'ils ont des lettres com-

munes. Supposons donc que les polynômes A et B aient été ordonnés par rapport à une lettre x, et que le degré de B ne surpasse pas celui de A. Il est évident que si A était exactement divisible par B, le polynôme B serait le plus grand commun diviseur; ce qui mène à diviser A par B.

Concevons qu'on effectue la division de A par B, en ayant soin de ne mettre au quotient que des termes entiers. Soit Q le quotient arrêté à un point quelconque de l'opération et R le reste correspondant, on aura

$$A = BQ + R, \text{ d'où } A - BQ = R.$$

On voit par là que le plus grand commun diviseur D de A et de B est le même que celui de B et de R. En effet, D, divisant A et BQ, divise A — BQ et par conséquent R. Or, si l'on représente par A', B', R' les quotients de A, B, R par D, en divisant par D les deux membres de l'égalité ci-dessus, on aura $A' = B'Q + R'$, résultat dans lequel B' et R' sont premiers entre eux; car, s'ils avaient un facteur commun, celui-ci devrait diviser $B'Q + R'$ et par conséquent A'. Donc D, qui est le plus grand commun diviseur de A et de B, ne contiendrait pas tous leurs facteurs communs, ce qui est contre la définition. B' et R', qui sont les quotients de B et de R par D, étant premiers entre eux, il s'ensuit que le plus grand commun diviseur de B et de R est D, et qu'il est ainsi le même que celui des polynômes A et B.

Donc pour trouver le plus grand commun diviseur des polynômes A et B, il suffit de chercher celui des polynômes B et R, plus simples que les premiers.

Mais ce qui précède, étant vrai en quelque point de l'opération qu'on arrête la division de A par B, aura encore lieu si on la pousse autant que possible, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'on obtienne un reste R de degré inférieur à B. Dans ce dernier cas, si l'on raisonne sur les polynômes B et R, comme sur les polynômes A et B, on divisera B par R, en ayant soin de ne mettre au quotient que des termes entiers, et l'on continuera de même à diviser chaque reste par le suivant, ce qui conduira chaque fois à un reste d'un degré moindre que le diviseur,

puisque les polynômes ont été ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une même lettre, de sorte qu'on doit arriver à un reste nul ou indépendant de cette lettre x. Quand ce reste sera nul, le reste précédent sera le plus grand commun diviseur des polynômes A et B; mais si ce reste n'est pas nul, les polynômes ne pourront avoir de plus grand commun diviseur fonction de x.

On voit que ce procédé revient à la règle générale que nous avons donnée en Arithmétique (nº 46).

Le raisonnement précédent suppose le quotient Q entier. Or, le plus souvent le premier terme du polynôme A ne sera pas exactement divisible par le premier terme du polynôme B, comme il arrive dans l'exemple ci-dessus, où l'on doit diviser x^4 par $2x^3$; mais on lève aisément cette difficulté en remarquant qu'on n'altère pas le plus grand commun diviseur des deux polynômes A et B en multipliant ou en divisant l'un d'eux par toute quantité entière n'ayant aucun facteur premier avec l'autre. Car dans les deux cas, les facteurs premiers communs aux deux polynômes, et par conséquent leur plus grand commun diviseur, restent exactement les mêmes.

On rendra donc la division possible en multipliant le dividende A par le coefficient de la plus haute puissance de x dans B, ou plus simplement par les facteurs premiers de ce multiplicateur étrangers à celui de la plus haute puissance de x dans A, après toutefois s'être assuré que la quantité par laquelle on multiplie A n'est point un facteur de B. Opérant de même chaque fois que dans le cours de la division de A par B le coefficient du premier terme d'un dividende partiel ne sera pas exactement divisible par le coefficient du premier terme du diviseur, on arrivera sans fraction à un reste R d'un degré moindre que B; alors on divisera B par R, en supprimant d'abord tous les facteurs communs aux termes de R, s'il s'en trouve; ce qui n'altère en rien le plus grand commun diviseur; et ainsi de suite.

265. Lorsque les polynômes A et B ne contiennent qu'une seule lettre x, l'application de ces règles n'offre aucune difficulté, parce que dans le cours de l'opération on n'a jamais que

des facteurs numériques à introduire dans les dividendes ou à supprimer dans les restes successifs, et qu'on reconnaît immédiatement si les facteurs introduits dans les dividendes ne sont pas facteurs du diviseur. Si l'opération conduit à un reste nul, le reste précédent est le plus grand commun diviseur de A et de B. Si le dernier reste n'est pas nul, les polynômes A et B n'ont aucun commun diviseur, du moins autre que l'unité. Car tout diviseur commun à ces deux polynômes, devant diviser le dernier reste, ne pourrait être qu'un nombre. Or, par hypothèse, A et B ne contiennent plus de facteurs numériques.

Soient proposés les deux polynômes

$$3x^4 + 3x^3 - 12x^2 + 3x + 3,$$
$$12x^3 - 6x^2 - 24x + 18.$$

Le premier pouvant se diviser par 3 et le deuxième par 6, si l'on effectue ces divisions, on trouve pour quotients

$$A = x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1$$
$$B = 2x^3 - x^2 - 4x + 3;$$

et le plus grand commun diviseur des polynômes A et B, multiplié par 3, qui est le plus grand commun diviseur des facteurs numériques 3 et 6, sera le plus grand commun diviseur des polynômes proposés.

Le premier terme x^4 du dividende A n'étant pas divisible par le premier terme $2x^3$ du diviseur B, on rend la division possible en multipliant A par 2, ce qui donne

$$2x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 2x + 2.$$

On place le terme x au quotient, et l'on a pour reste

$$3x^3 - 4x^2 - x + 2,$$

qu'il faut aussi multiplier par 2, afin de pouvoir continuer la division, ce qui donne $6x^3 - 8x^2\ 2x + 4$. On trouve pour quotient 3 et pour reste $-5x^2 + 10x - 5$, qui contient x à un degré moindre que le diviseur. Supprimant le facteur -5 commun à tous les termes de ce reste, on a $x^2 - 2x + 1$, par lequel il faut diviser le premier diviseur B. Le premier reste

de cette nouvelle division est $3x^2 - 6x + 3$ qui divisé par $x^2 - 2x + 1$ donne 3 pour quotient et o pour reste.

On trouve donc $x^2 - 2x + 1$ pour le plus grand commun diviseur de A et de B, et $3(x^2 - 2x + 1)$ pour celui des polynômes proposés.

L'opération se dispose ainsi qu'il suit :

Première division.

$$\begin{array}{r|l}
x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 & 2x^3 - x^2 - 4x + 3 \\ \cline{2-2}
2x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 2x + 2 & x + 3 \\
-2x^4 + x^3 + 4x^2 - 3x & \\ \hline
3x^3 - 4x^2 - x - 2 & \\
6x^3 - 8x^2 - 2x + 4 & \\
-6x^3 + 3x^2 + 12x - 9 & \\ \hline
-5x^2 + 10x - 5 & \\
x^2 - 2x - 2 &
\end{array}$$

Deuxième division.

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 - x^2 - 4x + 3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
-2x^3 + x^2 - 2x & 2x + 3 \\ \hline
3x^2 - 6x + 3 & \\
-3x^2 + 6x - 3 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

266. Sachant trouver, par ce qui précède, le plus grand commun diviseur de deux quantités ne contenant qu'une seule lettre, on obtient avec la même facilité celui de plusieurs quantités ne contenant aussi qu'une seule lettre. Prenons, par exemple, trois quantités A, B, C. Soit D le plus grand commun diviseur de A et de B, ou le produit de tous leurs facteurs premiers communs, et D′ le plus grand commun diviseur de D et de C, ou le produit de tous leurs facteurs communs; il est évident que D′ sera le produit de tous les facteurs premiers communs aux trois quantités A, B, C, et par conséquent leur plus grand commun diviseur. Il en est de même pour un plus grand nombre de quantités.

267. Cherchons maintenant le plus grand commun diviseur de deux polynômes M et N contenant deux lettres x et y.

Prenons d'abord (263) le plus grand commun diviseur m des termes de M, et le plus grand commun diviseur n des termes de N. Soit A le quotient de M par m, et B celui de N par n, on aura $M = mA$, $N = nB$. Si l'on ordonne A et B selon les puissances décroissantes d'une même lettre, x par exemple, tout diviseur indépendant de x devra, pour chacun des polynômes A et B, diviser séparément les coefficients de toutes les puissances de x dans ce polynôme : et comme ces coefficients, qui peuvent être des polynômes, ne contiendront que la seule lettre y, il sera facile de déterminer pour A et pour B les plus grands communs diviseurs a et b, indépendants de x. Soit A' le quotient de A par a et B' celui de B par b, on aura $A = aA'$, $B = bB'$, et par suite $M = maA'$, $N = nbB'$; de sorte que chacun des polynômes proposés sera décomposé dans les trois facteurs suivants, le produit des facteurs monômes, le produit des facteurs polynômes indépendants de x, et le produit des facteurs polynômes dépendants de x. D'où il résulte que le plus grand commun diviseur des polynômes proposés sera égal au produit des trois plus grands communs diviseurs suivants, celui de m et de n, celui de a et de b, et celui de A' et de B'; car ce produit contiendra tous les facteurs premiers communs à M et à N, soit monômes, soit indépendants de x, soit dépendants de x.

On sait déjà trouver les deux premiers plus grands communs diviseurs. Quant à celui des polynômes A' et B', qui contiennent x et y, mais sont débarrassés de tous les facteurs monômes et polynômes indépendants de x, on le détermine en suivant exactement la marche indiquée (265) pour deux polynômes ne contenant qu'une seule lettre.

La seule différence est qu'on n'aura plus seulement des facteurs numériques à introduire dans les dividendes ou à supprimer dans les restes successifs, mais bien des facteurs algébriques qui pourront être des polynômes en y, ce qui, par suite de l'état de A' et de B', ne peut altérer leur plus grand commun diviseur.

On sera donc certain d'arriver, au moyen de divisions successives, à un reste nul ou indépendant de x, ce qui donnera selon le cas, le dernier diviseur ou l'unité pour plus grand commun diviseur des polynômes A′ et B′.

268. Voici le calcul pour les deux polynômes A et B obtenus plus haut (263) après la suppression des facteurs monômes, et qui contiennent deux lettres x et a.

Première division.

$$\begin{array}{r|l} x^4-3ax^3+2a^2x^2-3a^3x+a^4 & 2x^3-7ax^2+5a^2x-a^3 \\ \cline{2-2} 2x^4-6ax^3+4a^2x^2-6a^3x+2a^4 & x+a \\ -2x^4+7ax^3-5a^2x^2+a^3x & \\ \hline ax^3-a^2x^2-5a^3x+2a^4 & \\ 2ax^3-2a^2x^2-10a^3x+4a^4 & \\ -2ax^3+7a^2x^2-5a^3x+a^4 & \\ \hline 5a^2x^2-15a^3x+5a^4 & \\ x^2-3ax+a^2 & \end{array}$$

Deuxième division.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-7ax^2+5a^2x-a^3 & x^2-3ax+a^2 \\ \cline{2-2} -2x^3+6ax^2-2a^2x & 2x-a \\ \hline -ax^2+3a^2x-a^3 & \\ +ax^2-3a^2x+a^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Le plus grand commun diviseur est $x^2-3ax+a^2$ pour les polynômes A et B, et $6ax^3-18a^2x^2+6a^3x$ pour les polynômes M et N (263).

Cet exemple, très-simple, rentre à peu près dans le cas des polynômes ne renfermant qu'une seule lettre, mais il n'en est pas de même des suivants.

269. Soit

$$M=(y-1)x^3+(y^2+y-2)x^2+(2y^2-y-1)x+y^2-y,$$
$$N=(y^2-1)x^2+(y^3-1)x+y^2-y.$$

Le plus grand commun diviseur des coefficients des diverses

puissances de M est $y - 1$, et celui des coefficients de N est de même $y - 1$, qui est par conséquent le plus grand commun diviseur de M et de N indépendant de x.

Divisant M et N par $y - 1$, on trouve

$$A = x^3 + (y+2)x^2 + (2y+1)x + y,$$
$$B = (y+1)x^2 + (y^2+y+1)x + y.$$

Pour diviser A par B, il faut multiplier A par $y+1$, coefficient du premier terme de B, ce qu'on peut faire sans altérer le plus grand commun diviseur de A et de B, puisque $y+1$, ne divisant pas le dernier terme y de B, n'est pas facteur de B; et comme il faudra multiplier encore le reste par $y+1$, il vaut mieux multiplier d'abord A par $(y+1)^2$ ou y^2+2y+1. On obtient ainsi le reste y^2x+y^3, ou bien $x+y$ en supprimant le facteur commun y^2. Divisant ensuite B par $x+y$, on trouve zéro pour reste, d'où il résulte que $x+y$ est le plus grand commun diviseur des polynômes A et B, et que par suite $(x+y)(y-1)$ ou $(y-1)x+y^2-y$ est celui des polynômes proposés.

Le calcul se dispose ainsi qu'il suit :

Première division.

$$\begin{array}{l|l}
x^3+(y+2)x^2+(2y+1)x+y & (y+1)x^2+(y^2+y+1)x+y \\
\hline
(y+1)^2x^3+(y^3+4y^2+5y+2)x^2+(2y^3+5y^2+4y+1)x & (y+1)x+2y+1 \\
\qquad +y^3+2y^2+y & \\
-(y+1)^2x^3-(y^3+2y^2+2y+1)x^2-(y^3+y)x & \\
\hline
(2y^2+3y+1)x^2+(2y^3+4y^2+3y+1)x+y^3+y^2+y & \\
-(2y^2+3y+1)x^2-(2y^3+3y^2+3y+1)x-(2y^2+y) & \\
\hline
y^2x+y^3 & \\
x+y &
\end{array}$$

Deuxième division.

$$\begin{array}{l|l}
(y+1)x^2+(y^2+y+1)x+y & x+y \\
\hline
-(y+1)x^2-(y^2+y)x & (y+1)x+1 \\
\hline
x+y & \\
-x-y & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

270. Le plus grand commun diviseur de plusieurs polynômes qui ne contiennent que deux lettres, s'obtiendra de la même manière qu'au n° 266.

On vient de voir que la marche indiquée pour trouver le

plus grand commun diviseur de plusieurs polynômes ne contenant qu'une lettre, conduit à déterminer celui de plusieurs polynômes contenant deux lettres. De même on s'élevera de ce dernier cas à celui de plusieurs polynômes contenant trois lettres, et par suite un plus grand nombre de lettres. On pourra donc toujours obtenir le plus grand commun diviseur de plusieurs polynômes contenant un nombre quelconque de lettres.

271. *Remarque* I. Lorsque l'un des polynômes, A, par exemple, contient une lettre a qui ne se trouve pas dans l'autre B, le plus grand commun diviseur est nécessairement indépendant de cette lettre. Par conséquent, le plus grand commun diviseur cherché devra diviser tous les coefficients du polynôme A ordonné par rapport à la lettre a. Lorsqu'on aura trouvé le plus grand commun diviseur de ces coefficients, s'il divise exactement B, il sera le plus grand commun diviseur des polynômes proposés.

272. *Remarque* II. Le cas le plus embarrassant, dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynômes, est celui où la plus haute puissance de la lettre principale, dans l'un quelconque des dividendes, a pour coefficient un polynôme qui se trouve facteur de tous les autres termes du dividende. Si l'on ne découvre pas ce facteur, et que l'on continue les divisions, les calculs se compliquent de plus en plus, et rendent la recherche très-pénible. Lors donc que cette circonstance se présente, il est fort essentiel d'examiner si le coefficient polynôme en question est oui ou non premier avec les autres termes du dividende, et s'il est en même temps premier avec le diviseur. Dans ce dernier cas, s'il divise tous les autres coefficients du dividende, ou s'il a quelques facteurs communs avec eux, on supprime le coefficient ou ses facteurs communs, ce qui, d'après ce qu'on a vu plus haut, n'altère pas le plus grand commun diviseur.

En général, il est très-utile de s'accoutumer à décomposer un polynôme en ses facteurs premiers, et à reconnaître, sans recourir à la division, si les facteurs divisent oui ou non un polynôme donné.

273. On peut s'exercer sur les exemples suivants :

1° $A = x^4 - 3x^3 - (5y^2 - y - 2)x^2 + 12y^2x + 4y^2(y^2 - y - 2)$,
$B = x^3 - 3(y+1)x^2 - (y^2 - 10y - 2)x + 3y(y^2 - y - 2)$.

On trouve $D = x^2 - 3x - (y^2 - y - 2)$.

2° $A = (y^3+y^2)x^7 - 3(y^3+y^2)x^6 - (5y^5 + 4y^4 - 3y^3 - 2y^2)x^5 + 12(y^5+y^4)x^4 + 4(y^7 - 3y^5 - 2y^4)x^3$,

$B = (y^3 - y)x^5 - 3(y^4 + y^3 - y^2 - y)x^4 - (y^5 - 10y^4 - 3y^3 + 10y^2 + 2y)x^3 + 3(y^6 - y^5 - 3y^4 + y^3 + 2y^2)x^2$.

On trouve $D = yx^2(y+1)(x^2 - 3x - y^2 + y + 2)$.

3° $A = (y^2 + z^2 - 2yz)x^4 + (y^5z + y^3z^2 - 2y^4z)x$,
$B = (2y^2 - 2z^2)x^4 - (5y^4 - 5y^2z^2)x^2 + 3y^6 - 3y^4z^2$.

On trouve $D = (y - z)(x - y)$.

274. Nous terminerons par le théorème suivant, qui est analogue à celui du n° 182, et nous sera très-utile dans la composition des équations (281).

Théorème. *Tout facteur binôme, tel que* x — a, *qui divise le produit* AB *de deux polynômes entiers et rationnels par rapport à* x, *divise nécessairement l'un de ces polynômes.*

D'abord un polynôme, contenant une lettre principale x, est dit *entier* et *rationnel* (ou simplement *entier*) par rapport à x, lorsque x n'entre pas en dénominateur ni sous des signes radicaux, ses exposants étant d'ailleurs entiers positifs, et ses coefficients pouvant être fractionnaires ou irrationnels. De tels polynômes sont divisibles l'un par l'autre, lorsque leur quotient est complet et d'ailleurs entier par rapport à x.

Cela posé, supposons que le polynôme A ne soit pas divisible par $x - a$, la division donnera un quotient Q entier par rapport à x et un reste R indépendant de x, de sorte qu'on aura l'égalité $A = (x - a)Q + R$. Multipliant les deux membres par B, et les divisant ensuite par $x - a$, il vient $\frac{AB}{x-a} = BQ + \frac{BR}{x-a}$. Or, par hypothèse, $\frac{AB}{x-a}$ est entier par rapport à x; donc il doit

en être de même de $\frac{BR}{x-a}$, et comme R est indépendant de x, B doit être divisible par $x-a$.

Remarque I. *Tout binôme* x — a, *qui divise le produit* ABCD... *de plusieurs polynômes entiers par rapport à* x, *divise nécessairement un de ces polynômes. La démonstration est identique avec celle qu'on a donnée pour les nombres* (183).

Remarque II. *Un polynôme entier par rapport à* x *ne peut se décomposer que d'une seule manière en facteurs du premier degre en* x.

En effet, soit un polynôme X formé du produit de m facteurs simples $x-a$, $x-b$, $x-c$,... $x-l$, de sorte qu'on ait

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l),$$

et soit encore, s'il est possible,

$$X=(x-a')(x-b')(x-c')\ldots(x-l'),$$

$a', b', c', \ldots l'$ étant différents de $a, b, c, \ldots l$; on aura l'égalité

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l)$$
$$=(x-a')(x-b')(x-c')\ldots(x-l');$$

mais $x-a'$, qui divise le second membre, devra diviser le premier et par conséquent se confondre avec l'un des facteurs qui le composent, $x-a$ par exemple; divisant les deux membres par $x-a$, il restera

$$(x-b)(x-c)\ldots(x-l)=(x-b')(x-c')\ldots(x-l').$$

On prouvera de même que $x-b'$ doit égaler l'un des facteurs du premier membre, $x-b$ par exemple; et ainsi de suite. Donc les facteurs des deux produits sont égaux chacun à chacun.

Cette remarque est analogue à celle qui forme le n° 184, et la démonstration est la même.

La présence d'un facteur M indépendant de x, tel qu'on le voit dans $X=M(x-a)(x-b)\ldots(x-l)$, ne modifie en rien la démonstration. Si quelques-uns des facteurs simples de X étaient égaux, on prouverait toujours de la même manière que le second produit doit être composé des mêmes facteurs affectés des mêmes exposants.

CHAPITRE VII.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS A UNE ET A PLUSIEURS INCONNUES.

SECTION PREMIÈRE.

COMPOSITION D'UNE ÉQUATION D'UN DEGRÉ QUELCONQUE A UNE INCONNUE.

§ 1er. *Préliminaires.* * *Théorème fondamental établissant que toute équation a une racine.*

Préliminaires.

275. Toute équation numérique du degré m, à une seule inconnue x, peut toujours être ramenée à la forme

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Tx + U = 0,$$

les coefficients P, Q,...T, U, d'ailleurs positifs ou négatifs, représentant des quantités numériques quelconques, et m étant un nombre entier positif.

Les équations algébriques du degré m, à une seule inconnue, sont celles qu'on peut réduire à la forme ci-dessus, les coefficients P, Q,... T, U, représentant des quantités connues quelconques, et m un nombre entier positif.

D'abord, quelle que soit l'équation donnée, on peut transposer dans le premier membre tous les termes du second, en changeant leurs signes, ce qui rend le premier membre égal à zéro. On peut aussi l'ordonner selon les puissances décroissantes de l'inconnue, et, en outre, diviser l'équation par le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue, s'il est autre que l'unité, ce qui n'altère pas l'équation.

Cela posé, on appelle *premier terme* de l'équation celui qui contient la plus haute puissance de l'inconnue, *second terme* celui qui contient la puissance moindre d'une unité ; ainsi de suite, et enfin *dernier terme* celui qui ne contient pas l'inconnue. Il suit de là qu'une équation *complète* du degré m doit renfermer $m+1$ termes, et que s'il manque, par exemple, le terme de la puissance $m-1$ ou $m-2$, elle sera sans second ou sans troisième terme ; alors l'équation est dite *incomplète*, et l'on suppose égal à zéro le coefficient du second ou du troisième terme. Si l'équation contenait l'inconnue avec des exposants négatifs ou fractionnaires, on les ferait disparaître comme nous l'indiquerons plus loin (301, 302).

276. On appelle *racine* d'une équation toute quantité *réelle* ou *imaginaire*, qui, substituée à la place de l'inconnue, rend le premier membre égal au second ou égal à zéro, si l'équation est ramenée à la forme indiquée ci-dessus, comme nous le supposerons toujours à l'avenir. On peut encore, pour abréger, représenter par X le polynôme formant le premier membre ; alors au lieu de l'équation donnée, on écrit $X=0$.

Résoudre une équation, c'est déterminer toutes ses racines ; et la résolution générale des équations consisterait à obtenir, pour l'équation générale de chaque degré, les expressions des racines en fonction des coefficients. On peut trouver ces expressions pour les équations des deuxième, troisième et quatrième degrés ; mais on n'a pu jusqu'à présent aller au delà. En outre, nous verrons plus loin que, même pour les équations du troisième et du quatrième degré, ces expressions ou formules sont insuffisantes dans certains cas, appelés *cas irréductibles*. Les analystes ne s'occupent donc plus maintenant qu'à perfectionner les procédés qui permettent de déterminer les racines des équations *numériques*, c'est-à-dire dont les coefficients sont des nombres donnés.

277. Nous allons d'abord exposer les théorèmes sur lesquels ces procédés sont fondés, et commencer par prouver, ce qui n'est pas évident *à priori*, que toute équation d'un degré quelconque a toujours au moins une racine.

Comme la démonstration suivante peut offrir encore quel-

ques difficultés à une première lecture de ces éléments, quoique bien plus simple que celles de MM. Legendre et Cauchy, rapportées par les auteurs, nous engageons ceux qui veulent admettre le théorème comme évident, à passer immédiatement au n° 281. C'est pourquoi nous l'avons mis en article séparé.

Théorème fondamental établissant que toute équation algébrique a une racine.

278. Voici d'abord deux lemmes dont nous aurons besoin.

Lemme I. *Si dans le polynôme à coefficients réels*

$$Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} \ldots,$$

dans lequel les exposants α, β, $\gamma \ldots$ *sont des nombres entiers positifs qui vont en décroissant, on donne à* x *des valeurs numériques suffisamment grandes, positives ou négatives, le polynôme prendra des valeurs de même signe que celles du premier terme, et pourra même devenir aussi grand qu'on le voudra.*

Car soit $n+1$ le nombre des termes. Il est clair que le polynôme sera de même signe que le premier terme Ax^{α}, si ce terme est plus grand que la somme des n autres, ce qui se réduit à déterminer x de manière que la n^e partie du premier terme soit plus grande que l'un quelconque des n autres. D'abord $\frac{Ax^{\alpha}}{n}$ sera plus grand que le second terme Bx^{β}, si l'on choisit x de telle sorte qu'il satisfasse à l'inégalité $\frac{Ax^{\alpha}}{n} > Bx^{\beta}$,

d'où $$x^{\alpha-\beta} > \frac{nB}{A}, \quad \text{et} \quad x > \sqrt[\alpha-\beta]{\frac{nB}{A}}.$$

Opérant de même sur les termes restants, on obtiendra pour chacun d'eux une valeur de x qui rendra $\frac{Ax^{\alpha}}{n}$ plus grand que ce terme; et l'on aura en tout n valeurs de x, dont la plus grande λ satisfera évidemment à la condition énoncée. En outre, toutes les valeurs de x plus grandes que λ satisferont également à la même condition.

Si maintenant on donne à x, à partir de λ, des valeurs in-

définiment croissantes, la valeur du polynôme ira elle-même en augmentant jusqu'à l'infini.

En effet, représentons par X le polynôme, qu'on peut écrire

$$X = A\left(x^\alpha + \frac{B}{A}x^\beta + \frac{C}{A}x^\gamma \ldots\right).$$

Si l'on représente par P la somme des termes positifs du second facteur, excepté x^α, et par N celle des termes négatifs, on aura

$$X = A(x^\alpha + P - N) = A\left[x^\alpha\left(1 - \frac{N}{x^\alpha}\right) + P\right].$$

Or si, à partir de $x = \lambda$, qui rend déjà X positif, on fait croître x indéfiniment, il est clair que le quotient $\frac{N}{x^\alpha}$ ira toujours en décroissant, tandis que x^α et P augmenteront indéfiniment. Par conséquent, X ira lui-même en croissant jusqu'à l'infini.

Remarque. Dans cette proposition, ainsi que dans la suivante, les signes des termes du polynôme peuvent être quelconques; en outre, si le polynôme est le premier membre d'une équation dont le second est zéro, on peut toujours supposer son premier terme positif.

279. Lemme II. *Si dans le polynôme à coefficients réels et d'un nombre fini de termes,* $Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma \ldots$, *dans lequel les exposants* α, β, γ,... *sont des nombres entiers positifs qui vont en croissant, on donne à* x *des valeurs numériques suffisamment petites, positives ou négatives, le polynôme prendra des valeurs de même signe que celles du premier terme, et pourra même devenir aussi petit qu'on le voudra.*

Car soit $n + 1$ le nombre des termes. Il est clair que le polynôme sera de même signe que le premier terme Ax^α, si ce terme est plus grand que la somme des n autres, ce qui se réduit à déterminer x de manière que l'un quelconque des n autres soit plus petit que la n^e partie du premier. D'abord le second terme Bx^β sera plus petit que $\frac{Ax^\alpha}{n}$, si l'on choisit x de telle sorte qu'il satisfasse à l'inégalité

$$Bx^{\beta} < \frac{Ax^{\alpha}}{n}, \quad \text{d'où} \quad x^{\beta-\alpha} < \frac{A}{nB}, \quad \text{et} \quad x < \sqrt[\beta-\alpha]{\frac{A}{nB}}.$$

Opérant de même sur les termes restants, on obtiendra pour chacun d'eux une valeur de x qui rendra ce terme plus petit que $\frac{Ax^{\alpha}}{n}$; et l'on aura en tout n valeurs de x dont la plus petite satisfera évidemment à la condition énoncée. En outre, toutes les valeurs de x plus petites que celles-ci satisferont également à la même condition.

Si maintenant on veut rendre le polynôme plus petit qu'une quantité donnée k, comme on a des valeurs de x qui rendent le premier terme plus grand que la somme des autres, il suffira de choisir, parmi ces valeurs, celles qui rendront le double du premier terme plus petit que k, c'est-à-dire $2Ax^{\alpha} < k$, d'où

$$x < \sqrt[\alpha]{\frac{k}{2A}}.$$

280. Théorème fondamental. *Une équation de degré quelconque à coefficients réels ou imaginaires, a toujours au moins une racine de la forme* $a + b\sqrt{-1}$.

Soit l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Gx + H = 0,$$

dont les coefficients A, B, C,... peuvent être réels ou imaginaires, m étant un nombre entier positif; il faut démontrer que cette équation a toujours au moins une racine de la forme $a + b\sqrt{-1}$, laquelle comprend toutes les quantités réelles ou imaginaires qui sont du ressort de l'Algèbre (191).

Considérons d'abord le premier membre, qui est un polynôme ordonné selon les puissances décroissantes d'une lettre x, cette lettre pouvant, ainsi que les coefficients A, B, C..., être réelle ou imaginaire. Si nous représentons ce polynôme par $f(x)$, nous aurons (195)

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Gx + H = P + Q\sqrt{-1},$$

et si nous remplaçons dans $f(x)$ les expressions x, A, B, C... par leurs conjuguées x', A', B', C'..., le résultat sera (199) le poly-

nôme conjugué du prémier; de sorte qu'en le représentant par $F(x')$, on aura

$$F(x')=A'x'^m+B'x'^{m-1}+C'x'^{m-2}\ldots+G'x'+H'=P-Q\sqrt{-1},$$

et le produit de ces polynômes conjugués sera

$$f(x).F(x')=P^2+Q^2,$$

quantité non-seulement réelle, comme on sait, mais encore essentiellement positive, quel que soit x, à moins qu'on n'ait à la fois $P=0$, $Q=0$, auquel cas cette quantité est nulle, ce que nous faisons observer ici une fois pour toutes.

Voyons maintenant ce que va devenir ce produit si l'on fait $x=u+v\sqrt{-1}$, u et v étant réels. Cette valeur de x peut se mettre sous la forme

$$x=\sqrt{u^2+v^2}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\sqrt{-1}\right),$$

et si l'on pose, pour abréger, le module $\sqrt{u^2+v^2}=\rho$, puis $\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}=p$, et $\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}=q$, les valeurs de x et de sa conjuguée x' prendront la forme

$$x=\rho(p+q\sqrt{-1}),\quad x'=\rho(p-q\sqrt{-1});$$

de plus, on aura la relation

$$(p+q\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1})=p^2+q^2=1.$$

Substituant ces valeurs de x et de x' dans le produit ci-dessus $f(x).F(x')$, il devient

$$f(x).F(x')=[A\rho^m(p+q\sqrt{-1})^m+B\rho^{m-1}(p+q\sqrt{-1})^{m-1}+..]$$
$$\times[A'\rho^m(p-q\sqrt{-1})^m+B'\rho^{m-1}(p-q\sqrt{-1})^{m-1}+..]$$

quantité réelle et positive, quel que soit le module ρ, ou tout au plus nulle comme on vient de le dire.

Il suit de là que les coefficients des diverses puissances de ρ dans ce produit doivent être tous réels, puisqu'ils ne peuvent se réduire tant que ρ est indéterminé. On peut au reste le vérifier directement par le calcul, qui donne, pour les coefficients des diverses puissances de ρ, soit des produits réels, soit des sommes dont les parties sont réelles ou conjuguées deux à deux.

En effet, si l'on développe le produit, on aura, en se bornant aux trois premiers termes,

$$f(x).F(x') = AA'\rho^{2m} + [AB'(p+q\sqrt{-1})^m(p-q\sqrt{-1})^{m-1}$$
$$+ A'B(p+q\sqrt{-1})^{m-1}(p-q\sqrt{-1})^m]\rho^{2m-1}$$
$$+[AC'(p+q\sqrt{-1})^m(p-q\sqrt{-1})^{m-2}+BB'(p+q\sqrt{-1})^{m-1}(p-q\sqrt{-1})^{m-1}$$
$$+A'C(p-q\sqrt{-1})^m(p+q\sqrt{-1})^{m-2}]\rho^{2m-2} + \text{etc.}$$

Or, le premier terme est réel et positif, puisqu'il en est ainsi de ρ^{2m}, quel que soit ρ, et de son coefficient AA' produit de deux expressions conjuguées (194). Le coefficient de ρ^{2m-1} est aussi réel (194), comme étant la somme de deux produits formés de facteurs conjugués chacun à chacun, et par conséquent conjugués. Le coefficient de ρ^{2m-2} est encore réel; car il est composé de la somme de trois parties, dont la première et la troisième sont conjuguées, comme étant les produits de quatre facteurs conjugués chacun à chacun, et dont la seconde est un produit réel formé de quatre facteurs conjugués deux à deux; en continuant, on verrait qu'il en est toujours de même. Donc, tous les coefficients sont des quantités réelles, et d'ailleurs nécessairement finies, puisque, par suite de la relation $p^2+q^2=1$, p et q sont des quantités finies et moindres que l'unité.

Mais si l'on fait varier les quantités u et v, ou seulement l'une d'elles, de manière à rendre le module ρ de plus en plus grand, le polynôme finira par prendre le signe de son premier terme (278), et par conséquent deviendra positif, puisque le premier terme $AA'\rho^{2m}$ l'est essentiellement.

Si maintenant on compare toutes les valeurs finies que prend le polynôme, lorsqu'on fait varier les quantités u et v, ou seulement l'une d'elles, entre des limites suffisamment étendues, mais finies, on trouvera nécessairement une valeur du polynôme qui sera plus petite que toutes les autres; et si l'on représente par a et b ce couple de valeurs de u et de v, il en résultera que les valeurs correspondantes de x et de x',

$$x = a + b\sqrt{-1}, \quad x' = a - b\sqrt{-1},$$

jouiront de la propriété de rendre le produit $f(x).F(x')$ un

minimum. Il reste à faire voir que cette valeur *minimum* du produit est zéro.

Pour cela, posons, en général, $x = a + b\sqrt{-1} + z$, z étant une indéterminée pouvant être réelle ou imaginaire. La substitution dans $f(x)$ donnera un polynôme, qui, étant ordonné suivant les puissances croissantes de z, sera de la forme

$$f(x) = M + Nz^{\alpha} + Oz^{\beta} + \ldots$$

dans lequel M est ce que devient $f(x)$ pour $z = 0$, c'est-à-dire, quand on y fait $x = a + b\sqrt{-1}$; ainsi

$$M = f(a + b\sqrt{-1}).$$

Il pourra se faire que quelques-uns des coefficients M, N,... soient nuls, mais ils ne le seront pas tous, puisque le coefficient A de la plus haute puissance de z ne pourra se réduire avec aucun autre, et que d'ailleurs il n'est pas nul. Supposons donc que N est le coefficient de la plus faible puissance de z qui ne devienne pas nul.

Désignons par i un nombre qu'on peut prendre aussi petit que l'on veut, et par h une indéterminée réelle ou imaginaire, en posant $z = ih$, le polynôme $f(x)$ deviendra

$$f(x) = M + Ni^{\alpha}h^{\alpha} + Oi^{\beta}h^{\beta} + \ldots$$

et en appelant h', M', N', O',... les conjuguées de h, M, N, O, on aura (199)

$$F(x') = M' + N'i^{\alpha}h'^{\alpha} + O'i^{\beta}h'^{\beta} + \ldots$$

alors le produit $f(x).F(x')$ deviendra

$f(x).F(x') = MM' + (MN'h'^{\alpha} + M'Nh^{\alpha})i^{\alpha} +$ (des termes en i d'un degré $> \alpha$), lequel produit ne doit pas pouvoir devenir négatif.

Mais, par hypothèse, les valeurs de a et de b sont telles que le produit $f(a + b\sqrt{-1}).F(a - b\sqrt{-1})$, c'est-à-dire MM', est la valeur *minimum* du premier membre. Donc la somme des termes en i du second membre devra être essentiellement positive, puisque si elle pouvait devenir négative, MM' ne serait plus la valeur *minimum* du produit. Par conséquent, le coefficient $MN'h'^{\alpha} + M'Nh^{\alpha}$ du premier terme de cette somme ne doit pas pouvoir devenir négatif, quelque valeur qu'on

donne d'ailleurs à h et par suite à sa conjuguée h'. Car si, pour certaines valeurs de h et de h', ce coefficient pouvait devenir négatif, en donnant alors à i des valeurs positives de plus en plus petites, le premier terme $(MN'h'^{\alpha} + M'Nh^{\alpha})i^{\alpha}$ finirait par surpasser la somme de tous les autres, puisque les exposants de i vont en croissant, et par suite la somme des termes en i serait négative (279).

Pour discuter les valeurs de ce coefficient, soit k (*) la plus haute puissance de 2 contenue dans l'exposant α, et n un nombre impair, α pourra s'écrire $2^k.n$. Posant $h = \sqrt[2^k]{r + s\sqrt{-1}}$, r et s étant des indéterminées réelles, on aura $h^{2^k} = r + s\sqrt{-1}$, puis $h^{\alpha} = h^{2^k.n} = (r + s\sqrt{-1})^n$; la conjuguée donnera de même

$$h'^{\alpha} = h'^{2^k.n} = (r - s\sqrt{-1})^n.$$

Le coefficient de i^{α} devient alors

$$MN'(r - s\sqrt{-1})^n + M'N(r + s\sqrt{-1})^n,$$

expression qui ne peut pas devenir négative.

Or, si l'on fait en second lieu $h = \sqrt[2^k]{-r - s\sqrt{-1}}$, il vient, à cause de l'exposant impair n,

$$-MN'(r - s\sqrt{-1})^n - M'N(r + s\sqrt{-1})^n.$$

Les deux expressions ci-dessus étant égales et de signes contraires, et d'ailleurs aucune d'elles ne pouvant devenir négative, il faut nécessairement que chacune soit nulle séparément. On a donc

$$MN'(r - s\sqrt{-1})^n + M'N(r + s\sqrt{-1})^n = 0,$$

quelles que soient les valeurs finies particulières qu'on donne à r et à s.

On peut poser $r = 0$, $s = 1$, ce qui donne

$$-MN'(\sqrt{-1})^n + M'N(\sqrt{-1})^n = 0;$$

supprimant le facteur commun $(\sqrt{-1})^n$, il vient

$$-MN' + M'N = 0.$$

(*) L'exposant α est ici supposé pair; dans le cas où il est impair, k est nul, et alors il faut poser $h = r + s\sqrt{-1}$.

On peut poser aussi $r=1$, $s=0$, ce qui donne

$$MN'+M'N=0.$$

Ces deux équations devant exister en même temps, il en résulte

$$MN'=0, \text{ et } M'N=0.$$

Mais, par hypothèse, le coefficient N et par suite son conjugué N' ne sont pas nuls. Donc il faut que l'on ait $M=0$, et $M'=0$, c'est-à-dire

$$f(a+b\sqrt{-1})=0, \quad \text{et} \quad F(a-b\sqrt{-1})=0.$$

Il suit de là que l'équation proposée $f(x)=0$ est satisfaite par la substitution de la valeur $x=a+b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités finies, ce qui démontre le théorème énoncé.

On voit, en outre, que l'équation $F(x')=0$, conjuguée de la proposée $f(x)=0$, est également satisfaite par la substitution de $x'=a-b\sqrt{-1}$, valeur conjuguée de celle de x.

Remarque. Si les coefficients A, B, C..., de la proposée sont réels, les deux équations $f(x)0=$, $F(x')=0$ se confondent en une seule et même équation. D'où il résulte que toute équation à coefficients réels, qui a une racine de la forme $a+b\sqrt{-1}$, dans laquelle b n'est pas nul, en a nécessairement une autre $a-b\sqrt{-1}$ conjuguée de la première. De sorte que les racines imaginaires d'une équation vont toujours par couples.

Si l'on avait $b=0$, les deux racines $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$ se confondraient en une seule et même racine a. Mais il ne faudrait pas en conclure que la proposée a, par cela même, deux racines égales à la valeur a.

§ 2. *Théorème sur la composition des équations.*

281. Théorème I. *Si* a *est une racine d'une équation, le premier membre de l'équation est exactement divisible par le binôme* x — a.

1re *Démonstration.* Représentons par X le premier membre de l'équation ramenée à la forme ordinaire (275), et divisons X par $x-a$. Le diviseur ne contenant x qu'au premier degré,

on pourra pousser l'opération jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste indépendant de x. Soit Q_1 le quotient, R_1 le reste, on aura l'égalité

$$X = (x - a)Q_1 + R_1.$$

Or, si l'on y fait $x = a$, le produit $(x - a)Q_1$ devient nul; car $x - a$ se réduit à zéro, et Q_1 ne peut devenir infini, puisqu'il ne contient pas x en dénominateur. Comme, en outre, R_1 est indépendant de x, il ne change pas de valeur. Donc, quel que soit a, le reste R_1 de la division de X par $x - a$ égale ce que devient X par la substitution de $x = a$, c'est-à-dire que l'on a

$$R_1 = a^m + Pa^{m-1} + \ldots..$$

Par conséquent si a est racine de l'équation $X = 0$, on a $R_1 = 0$; d'où il résulte que X est exactement divisible par $x - a$.

Réciproquement, si le binôme $x - a$ divise exactement X, la quantité a est racine de l'équation $X = 0$. Car on a $X = (x - a)Q_1$, où Q_1 est entier par rapport à x; et le second membre devenant zéro pour $x = a$, on doit avoir de même $X = 0$.

2e *Démonstration* (due à Lagrange). — Si a est racine de l'équation

$$(1) \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + Tx + U = 0,$$

la substitution de x au lieu de a doit réduire le premier membre à zéro; on aura donc

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots + Ta + U = 0.$$

Or, si l'on prend dans cette équation la valeur de U, et qu'on la reporte dans la première, en réunissant les termes de même puissance en x et en a, on aura

$$(x^m - a^m) + P(x^{m-1} - a^{m-1}) + Q(x^{m-2} - a^{m-2}) \ldots + T(x - a) = 0$$

mais chacun des binômes $x^m - a^m$, $x^{m-1} - a^{m-1}, \ldots$ est (57) exactement divisible par $x - a$; donc le premier membre de l'équation (1) l'est également.

3e *Démonstration.* — Le premier membre de l'équation (1) peut toujours, quelle que soit la quantité a, se mettre sous la forme

$$(x^m - a^m) + P(x^{m-1} - a^{m-1}) + Q(x^{m-2} - a^{m-2}) \ldots + T(x - a)$$
$$+ a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots + U,$$

dont la première ligne est divisible par $x-a$, et dont l'autre, indépendante de x, est le reste de la division de X par $x-a$, ou ce que devient X pour $x=a$.

Si donc a est racine de l'équation $X=0$, le polynôme X est divisible par $x-a$.

Cette démonstration a beaucoup d'analogie avec la précédente.

282. *Remarque* I. Pour obtenir le quotient total de X divisé par $x-a$, il suffit de diviser les binômes x^m-a^m, $x^{m-1}-a^{m-1}$, etc., par $x-a$, et d'ajouter les quotients partiels après avoir multiplié le second par P, le troisième par Q, etc., ce qui donne

$$\frac{X}{x-a}=\begin{array}{r|r|r} x^{m-1}+a & x^{m-2}+a^2 & x^{m-3}\ldots+\ \ a^{m-1}\\ +P & +Pa & +Pa^{m-2}\\ & +Q & +Qa^{m-3}\\ & & \vdots\\ & & +T \end{array}$$

Ce résultat offre la loi suivante :

Le coefficient du premier terme est l'unité, ou plutôt est le même que celui du premier terme du polynôme proposé X, *et en général le coefficient d'un terme quelconque, à partir du deuxième, se forme du coefficient du terme qui précède immédiatement en multipliant celui-ci par* a, *et en ajoutant au produit le coefficient du terme qui occupe le même rang dans le polynôme* X.

283. *Remarque* II. D'après ce qui précède, pour reconnaître si le polynôme $x^3+2x^2+8x+35$ est divisible par $x+5$, on fait $x=-5$ dans le polynôme; et comme on trouve zéro pour résultat, on en conclut que la division peut se faire exactement.

On reconnaît aussi, par le même procédé, si une quantité donnée est racine d'une équation; par exemple, si l'on égale à zéro le polynôme précédent, on aura l'équation

$$x^3+2x^2+8x+35=0,$$

qui est satisfaite par $x=-5$; donc -5 est une racine de cette équation.

284. Théorème II. *Toute équation du degré* m *a toujours* m *racines, et ne peut en avoir davantage.*

Soit l'équation $X=0$; comme elle a toujours (280) au moins une racine, représentons-la par a. Le polynôme X sera (281) divisible par $x-a$, et la division donnera pour quotient un polynôme du degré $m-1$, ayant x^{m-1} pour premier terme ; ainsi l'on aura

$$X=(x-a)(x^{m-1}+\text{etc.}).$$

Or, si l'on égale à zéro le polynôme $x^{m-1}+$ etc., on obtiendra une équation qui aura de même une racine b ; le polynôme $x^{m-1}+$ etc., sera donc divisible par $x-b$, et le quotient sera un polynôme tel que $x^{m-2}+$ etc. du degré $m-2$; on aura donc

$$x^{m-1}+\text{etc.}=(x-b)(x^{m-2}+\text{etc.}),$$

et par conséquent

$$X=(x-a)(x-b)(x^{m-2}+\text{etc.}).$$

En raisonnant sur le polynôme $x^{m-2}+$ etc., comme on l'a fait sur $x^{m-1}+$ etc., et en continuant de même à isoler un facteur du premier degré à chaque opération, comme le degré des quotients successifs diminue progressivement d'une unité, on finira par obtenir un quotient du premier degré, qui sera de la forme $x-l$. Le polynôme X se trouvera donc décomposé en m facteurs binômes du premier degré, de sorte qu'on aura

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l).$$

Il est clair que le polynôme X sera réduit à zéro, si l'on met à la place de x l'une quelconque des m valeurs a, b, c,... l, d'où il résulte que l'équation $X=0$ a m racines.

En outre, cette équation ne peut pas avoir plus de m racines. Car s'il en existait une nouvelle α, le facteur binôme $x-\alpha$ devrait diviser le premier membre X, ce qui est inadmissible, le polynôme X ne pouvant se décomposer que d'une seule manière en facteurs du premier degré (274, rem. II).

285. *Remarque* I. On peut encore démontrer que l'équation $X=0$ n'a pas plus de m racines, en observant que si elle avait

une nouvelle racine α différente des m premières $a, b; c, \ldots l$, la substitution de α au lieu de x rendrait X égal à zéro, ce qui est impossible ; car aucun des facteurs simples du produit

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l)=\mathrm{X}$$

ne devient nul par cette substitution. Or un produit de facteurs quelconques ne peut être nul à moins qu'un des facteurs ne soit nul (197).

286. *Remarque* II. Il peut arriver que quelques-unes des racines a, b, c,... soient égales. Par exemple, si le polynôme X renferme trois facteurs égaux à $x-a$, l'équation $\mathrm{X}=0$ a trois racines égales à la quantité a, et quoique alors il n'ait plus m racines différentes, on dit toujours que le degré m de l'équation indique le nombre des racines, celles-ci pouvant ne pas être toutes différentes entre elles.

287. *Remarque* III. Si l'on multiplie deux à deux, trois à trois, etc., les facteurs du premier degré d'un polynôme X, les produits obtenus seront évidemment des diviseurs de X. Or il résulte du théorème précédent que le polynôme X ne peut admettre d'autres diviseurs que ceux qui proviennent de ces combinaisons. Donc, pour un polynôme du degré m, le nombre des diviseurs du second degré sera $\frac{m(m-1)}{1.2}$, celui des diviseurs du troisième degré sera $\frac{m(m-1)(m-1)}{1.2.3}$, et, en général, celui des diviseurs d'un degré $n < m$ sera égal au nombre de combinaisons qu'on peut former avec m quantités prises n à n.

288. Théorème III. *Dans toute équation ramenée à la forme ordinaire* (275), *le coefficient du second terme, pris avec un signe contraire, est égal à la somme des racines ; le coefficient du troisième terme est égal à la somme des produits des racines prises deux à deux ; le coefficient du quatrième terme, pris avec un signe contraire, est égal à la somme des produits des racines prises trois à trois ; ainsi de suite, en changeant le signe des coefficients des termes de rang pair. Enfin le dernier terme, pris avec son signe ou avec un signe contraire, suivant que le*

degré de l'équation est pair ou impair, est égal au produit de toutes les racines.

Car on sait (169) que dans le produit de m facteurs $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc., le coefficient du second terme est la somme des quantités a, b, c, etc.; que le coefficient du troisième terme est la somme de leurs produits deux à deux, etc.; et que le dernier terme est le produit de toutes ces quantités. Or le premier membre de l'équation générale $x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots=0$ est composé des m facteurs simples $x-a$, $x-b$, $x-c$,... dont les seconds termes sont les racines de l'équation. Il suffit donc de changer le signe des racines pour qu'on applique ici les mêmes règles; alors tous les produits où elles entrent en nombre impair changeront de signe, et ceux où elles entrent en nombre pair n'en changeront pas; ce qui démontre le théorème.

289. *Remarque* I. D'après cela il est facile de former une équation dont les racines sont données.

Il suit encore de là que :

1° Une équation privée de second terme ne saurait avoir toutes ses racines réelles et de même signe. Dans le cas où toutes les racines seraient réelles, la somme des racines positives serait égale à celle des racines négatives.

2° Toute équation qui manque de dernier terme a une racine égale à zéro; et, en général, toute équation privée des n derniers termes a n racines égales à zéro. Car elle sera de forme

$$x^m+Px^{m-1}+\ldots+Sx^{m-n}=0,$$

et tous ses termes auront x^n pour diviseur. Elle sera donc satisfaite par $x^n=0$, équation qui a n racines égales à zéro.

290. *Remarque* II. On pourrait penser qu'il serait avantageux, pour déterminer les racines, de substituer à l'équation proposée le système des m équations que le théorème ci-dessus donne entre les racines et les coefficients. Mais chacune des lettres a, b, c... représentant indifféremment telle racine qu'on voudra, si l'on trouve par un procédé quelconque une équation ne renfermant plus que l'une d'elles, a par exemple, il faut nécessairement que cette équation donne indifférem-

ment toutes les racines. Elle doit donc être tout à fait semblable à l'équation proposée.

Prenons pour exemple l'équation du troisième degré

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0.$$

Soient a, b, c les trois racines; on aura, pour les déterminer, les trois relations

$$P = -a - b - c, \; Q = ab + ab + bc, \; R = -abc.$$

Le procédé le plus simple pour éliminer b et c entre ces équations, est de les ajouter après avoir multiplié la première par a^2, et la deuxième par a, ce qui donne, après les réductions,

$$a^3 + Pa^2 + Qa + R = 0,$$

équation exactement semblable à la proposée.

Ce qui précède montre d'ailleurs que tout autre procédé d'élimination conduirait au même résultat, ou à des équations pareilles en b ou en c, et offrant ainsi, pour être résolues, les mêmes difficultés que l'équation proposée.

291. THÉORÈME IV. *Toute équation à coefficients réels, qui a une racine imaginaire* $\mathrm{a} + \mathrm{b}\sqrt{-1}$, *admet aussi pour racine l'expression conjuguée* $\mathrm{a} - \mathrm{b}\sqrt{-1}$.

Cette proposition, déjà déduite du théorème fondamental (280, rem.), peut s'établir directement comme il suit.

Si dans le premier membre de l'équation on remplace successivement x par $a + b\sqrt{-1}$ et par sa conjuguée $a - b\sqrt{-1}$, on aura (199) les résultats conjugués $P + Q\sqrt{-1}$, $P - Q\sqrt{-1}$. Or $a + b\sqrt{-1}$ étant racine de l'équation, on a $P + Q\sqrt{-1} = 0$, ou $P = 0$ et $Q = 0$; donc on a aussi $P - Q\sqrt{-1} = 0$, et par conséquent $a - b\sqrt{-1}$ est également une racine de l'équation.

292. *Remarque.* Il suit de là que les racines imaginaires d'une équation à coefficients réels sont toujours en nombre pair et donnent des couples de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$. Chacun d'eux fournit deux facteurs du premier degré

$$x - a - b\sqrt{-1}, \quad x - a + b\sqrt{-1},$$

dont le produit est $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$, c'est-à-dire un facteur réel du deuxième degré en x. De là résulte ce théorème général:

THÉORÈME V. *Toute équation algébrique à coefficients réels est toujours composée d'autant de facteurs réels du premier degré qu'elle a de racines réelles, et d'autant de facteurs réels du second degré qu'elle a de couples de racines imaginaires.*

SECTION II.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS. POLYNÔMES DÉRIVÉS. RACINES ÉGALES.

§ 1er. *Transformation des équations.*

293. Sans connaître les racines d'une équation, on peut toujours la transformer en une autre dont les racines aient une relation connue avec celles de la première. Souvent il est plus facile de résoudre l'équation transformée ; et quand on connaît ses racines, on en déduit, par la relation établie, celles de l'équation proposée. Tel est, en général, l'objet de la transformation des équations.

Nous allons exposer les transformations le plus en usage, en considérant l'équation générale

(A) $$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + Tx + U = 0,$$

qui, décomposée en ses facteurs simples, est de la forme

(B) $$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots = 0,$$

en désignant les racines par a, b, c, ...

294. TRANSFORMATION I. *Changer une équation en une autre qui ait les mêmes racines prises avec des signes contraires.*

Prenons l'équation (B), et nommons y l'inconnue de la transformée ; celle-ci sera évidemment

$$(y+a)(y+b)(y+c)\ldots = 0,$$

ou bien, en changeant tous les signes,

$$(-y-a)(-y-b)(-y-c)\ldots = 0;$$

d'où il résulte qu'on changera le signe des racines d'une équation en faisant $x = -y$, ce qui revient à changer le signe de l'inconnue, c'est-à-dire celui des coefficients de ses puissances impaires. D'après cela, si le degré m est pair, on changera le signe des termes de rang pair; et si m est impair, on changera le signe des termes de rang impair. Mais comme alors le premier terme devient négatif, et que d'ailleurs on peut changer tous les signes sans altérer l'équation, on voit que les termes de rang pair changeront de signe, et que ceux de rang impair reprendront le leur. Donc, dans tous les cas, en supposant complète l'équation donnée du degré m, *pour changer le signe des racines, il suffit de donner aux termes de rang pair un signe contraire à celui qu'ils ont déjà.*

Si, par exemple, l'équation est $x^3 - 8x^2 - 12x + 5 = 0$, la transformée qui aura les mêmes racines, mais prises avec des signes contraires, sera $x^3 + 8x^2 - 12x - 5 = 0$.

295. *Remarque* I. Une équation de la forme ordinaire, dont tous les termes sont de même signe, ne peut avoir de racine positive. Car en donnant à x une valeur positive, le premier membre devient une somme de quantités positives, qui ne peut être égale à zéro. Par conséquent aussi, une équation complète à termes alternativement positifs et négatifs, n'admet pas de racine négative. Car la transformée, qu'on obtient en changeant le signe des termes de rang pair, ayant tous ses termes positifs, n'a pas de racine positive.

Il suit de là que *toute équation complète ou incomplète, dans laquelle les termes des puissances paires de* x *sont tous de même signe, et ceux des puissances impaires sont tous de signes contraires aux premiers, ne peut avoir aucune racine négative.*

Car si l'on change x en $-x$, la transformée aura tous ses termes de même signe, qu'on pourra rendre positifs, s'ils ne le sont déjà. Elle n'aura donc aucune racine positive, et par suite la proposée n'aura pas de racine négative.

296. *Remarque* II. Lorsqu'une équation ne contient que des puissances paires de l'inconnue, les racines sont égales deux à deux au signe près. Car la transformée, provenant de la substi-

tution de $-y$ au lieu de x, restant identique avec la proposée, si $+a$ est racine, $-a$ doit l'être également.

Réciproquement, si les racines sont $+a, -a, +b, -b, \ldots$ le premier membre de l'équation sera le produit des facteurs simples $x-a$, $x+a$, $x-b$, $x+b\ldots$, et par conséquent le produit des facteurs du second degré x^2-a^2, $x^2-b^2\ldots$; or ce dernier produit ne peut contenir que des puissances paires.

297. TRANSFORMATION II. *Changer une équation en une autre dont les racines soient réciproques de celles de la proposée.*

On appelle quantités *réciproques* l'une de l'autre, celles dont le produit est 1. La transformée de l'équation B (293) sera donc

$$\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{b}\right)\left(x-\frac{1}{c}\right)\ldots=0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\left(a-\frac{1}{x}\right)\left(b-\frac{1}{x}\right)\left(c-\frac{1}{x}\right)\ldots=0$$

en multipliant respectivement les facteurs par $\frac{a}{x}, \frac{b}{x}, \frac{c}{x}\ldots$ Si l'on change alors le signe de tous les facteurs, il vient l'équation

$$\left(\frac{1}{x}-a\right)\left(\frac{1}{x}-b\right)\left(\frac{1}{x}-c\right)\ldots=0;$$

or, celle-ci peut se déduire de la proposée en changeant x en $\frac{1}{x}$.

Si l'on effectue ce même changement dans la proposée prise sous la forme (A)

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=0,$$

on a pour la transformée

$$\frac{1}{x^m}+\frac{P}{x^{m-1}}+\frac{Q}{x^{m-2}}\ldots+\frac{T}{x}+U=0.$$

En renversant l'ordre des termes après avoir multiplié par x^m et divisé par U, cette transformée devient

$$x^m+\frac{T}{U}x^{m-1}\ldots+\frac{Q}{U}x^2+\frac{P}{U}x+\frac{1}{U}=0.$$

298. TRANSFORMATION III. *Changer une équation en une autre dont les racines soient égales à celles de la proposée multipliees ou divisées par une quantité donnée* h.

1° La transformée de l'équation B (293) est évidemment

$$(y-ah)(y-bh)(y-ch)\ldots=0;$$

et la divisant par h^m ou chaque facteur par h, on a

$$\left(\frac{y}{h}-a\right)\left(\frac{y}{h}-b\right)\left(\frac{y}{h}-c\right)\ldots=0,$$

qui se conclut de l'équation (B) en changeant x en $\frac{y}{h}$. En effet, la relation énoncée donne $y=hx$, d'où $x=\frac{y}{h}$.

La transformée de la proposée (A) sera donc

$$\frac{y^m}{h^m}+P\frac{y^{m-1}}{h^{m-1}}+Q\frac{y^{m-2}}{h^{m-2}}\ldots+T\frac{y}{h}+U=0;$$

et en multipliant tous les termes par h^m, elle devient

$$y^m+Phy^{m-1}+Qh^2y^{m-2}\ldots+Th^{m-1}y+Uh^m=0.$$

Il suit de là que les coefficients de la transformée peuvent se déduire immédiatement de ceux de la proposée, en multipliant ceux-ci respectivement par $h^0, h^1, h^2\ldots, h^m$, de manière que le degré de chaque terme, relativement à x et h, soit égal à m.

2° Si la transformée doit avoir pour racines celles de la proposée divisées par h, on posera $y=\frac{x}{h}$, d'où $x=hy$. D'ailleurs ce cas rentre dans le premier en posant $y=x\left(\frac{1}{h}\right)$.

299. TRANSFORMATION IV. *Changer une équation qui a des dénominateurs en une autre qui n'en ait plus et dont le coefficient du premier terme soit toujours l'unité.*

Soit encore l'équation

$$\text{(A)}\qquad x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=0,$$

dont on a fait disparaître le coefficient du premier terme, s'il était autre que l'unité. Réduisant les autres coefficients au plus petit dénominateur commun h, et représentant les nouveaux

numérateurs par $p, q\ldots, t, u$, il vient

$$x^m + \frac{px^{m-1}}{h} + \frac{qx^{m-2}}{h}\ldots + \frac{tx}{h} + \frac{u}{h} = 0,$$

quel que soit x, et l'on a $p = Ph$, $q = Qh\ldots$, $u = Uh$.

Or, si l'on pose, comme dans la question précédente, $y = hx$, d'où $x = \frac{y}{h}$, l'équation ci-dessus devient

$$\frac{y^m}{h^m} + \frac{py^{m-1}}{h^m} + \frac{qy^{m-2}}{h^{m-1}}\ldots + \frac{ty}{h^2} + \frac{u}{h} = 0,$$

ou bien

$$\frac{y^m}{h^m} + \frac{Phy^{m-1}}{h^m} + \frac{Qhy^{m-2}}{h^{m-1}}\ldots\frac{Thy}{h^2} + \frac{Uh}{h} = 0;$$

multipliant par h^m on trouve la même transformée que dans la question précédente,

$$y^m + Phy^{m-1} + Qh^2y^{m-2}\ldots + Th^{m-1}y + Uh^m = 0.$$

D'où il résulte qu'*on fait disparaître les dénominateurs d'une équation, en la changeant en une autre qui ait pour racines celles de la proposée multipliées par le plus petit commun dénominateur des coefficients fractionnaires.*

Prenons pour exemple l'équation

$$x^4 - \frac{2x^3}{5} + \frac{4x^2}{15} + \frac{5x}{6} - 3 = 0,$$

ou $$x^4 - \frac{2x^3}{5} + \frac{4x^2}{3.5} + \frac{5x}{2.3} - 3 = 0.$$

Le plus petit commun dénominateur étant $2.3.5$, posons

$$y = 2.3.5.x, \text{ d'où } x = \frac{y}{2.3.5}.$$

La proposée deviendra

$$\frac{y^4}{2^4.3^4.5^4} - \frac{2y^3}{2^3.3^3.5^4} + \frac{4y^2}{2^2.3^3.5^3} + \frac{5y}{2^2.3^2.5} - 3 = 0,$$

ou bien

$$y^4 - 2.2.3y^3 + 4.2^2.3.5y^2 + 5^4.3^2.2^2.y - 3.2^4.3^4.5^4 = 0,$$

ou enfin

$$y^4 - 12y^3 + 240y^2 + 22500y - 2590000 = 0.$$

D'après la règle ci-dessus, on trouverait immédiatement la transformée en écrivant

$$y^4-\frac{2hy^3}{5}+\frac{4h^2y^2}{15}+\frac{5h^3y}{6}-3h^4=0,$$

et faisant $h=2.3.5$.

300. *Remarque.* On peut souvent obtenir une transformée plus simple en prenant pour h une quantité plus petite que le plus petit dénominateur commun des coefficients fractionnaires; car pour que la transformée n'ait plus de dénominateurs, il suffit que les divers facteurs premiers de h se trouvent dans les numérateurs des coefficients avec des exposants au moins égaux à ceux qu'ils ont dans les dénominateurs. Sans pouvoir préciser de règle pour cet objet, nous recommanderons de décomposer toujours les dénominateurs en leurs facteurs premiers, en se bornant à indiquer les multiplications, pour mieux apercevoir quelle peut être la plus petite valeur de h.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^3-\frac{7x^2}{6}+\frac{11x}{36}-\frac{25}{72}=0.$$

Le plus petit commun dénominateur étant 72, il faudrait, d'après la règle, faire $x=\frac{72}{y}$, mais il suffit de poser $x=\frac{y}{6}$, ce qui donne la transformée

$$y^3-7y^2+11y-75=0.$$

301. Transformation V. *Changer une équation où l'inconnue a des exposants entiers négatifs en une autre où tous les exposants de l'inconnue soient positifs.*

Soit l'équation

$$x^m+Ax^{m-1}\ldots+F+Gx^{-p}+Hx^{-q}\ldots+Kx^{-r}=0,$$

r étant le plus grand exposant affecté du signe —; si l'on représente le premier membre par X, et qu'on le multiplie par x^r, on aura

$$x^rX=x^{m+r}+Ax^{m+r-1}\ldots+Fx^r+Gx^{r-p}+Hx^{r-q}\ldots+K.$$

Le second membre de cette équation ne devenant pas nul

pour $x=0$, il en résulte que toute valeur de x, qui le réduira à zéro, rendra le polynôme X également nul, et par suite satisfera à l'équation proposée. Réciproquement, toute racine de la proposée $X=0$ sera aussi racine de la transformée.

302. TRANSFORMATION VI. *Changer une équation où l'inconnue a des exposants fractionnaires positifs en une autre où tous les exposants de l'inconnue soient entiers positifs.*

Soit l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} \ldots + Dx^{\frac{r}{p}} \ldots + Hx^{\frac{s}{q}} \ldots + K = 0.$$

Il est clair que si l'on remplace l'inconnue x par une nouvelle inconnue y élevée à une puissance marquée par le produit des dénominateurs des exposants fractionnaires, la transformée n'aura que des exposants entiers.

Prenons pour exemple l'équation

$$2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[2]{x} - 4 = 0,$$

qui revient à

$$2x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{2}} - 4 = 0.$$

Si l'on fait $x = y^{2.3}$, et qu'on substitue à x cette valeur, on trouve, après avoir ordonné,

$$3y^3 + 2y^2 - 4 = 0.$$

Cette transformation suppose que les quantités soumises aux radicaux sont des monômes en x, et deviendrait impraticable, si ces quantités étaient des polynômes en x.

Si l'équation contenait des exposants fractionnaires négatifs, on les ferait disparaître de la même manière.

303. *Remarque* I. Au moyen des trois transformations précédentes, toute équation à une inconnue, seulement soumise à la restriction qu'on vient d'énoncer, peut se changer, comme on l'a dit plus haut (275), en une autre dont tous les coefficients soient des nombres entiers, celui du premier terme étant l'unité, et dont les exposants de l'inconnue soient entiers et positifs, de sorte que l'équation sera de la forme

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + tx + u = 0,$$

$p, q, \ldots t, u$, étant des entiers et m un nombre entier positif.

Prenons pour exemple l'équation

$$\frac{2x}{5} - 3x^{-2} - 4x^2 + x^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2} = 0;$$

multipliant par x^2 pour rendre tous les exposants positifs, on a

$$\frac{2x^3}{5} - 3 - 4x^4 + x^{\frac{5}{3}} + \frac{3x^2}{2} = 0;$$

puis faisant $x = y^3$, il vient

$$\frac{2y^9}{5} - 3 - 4y^{12} + y^5 + \frac{3y^6}{2} = 0;$$

si maintenant l'on applique les règles données pour faire disparaître les dénominateurs sans donner au premier terme d'autre coefficient que l'unité, on trouve

$$z^{12} - 2^8 . 5^2 . z^9 - 3 . 2^{15} . 5^6 z^6 - 2^{19} . 5^7 . z^5 + 3 . 2^{34} . 5^{12} = 0, \text{ ou}$$

$$z^{12} - 6400z^9 - 1536000000z^6 - 40960000000z^5 + 12582912000000000000 = 0.$$

304. Remarque II. *Si une équation, ramenée à la forme précédente, a des racines commensurables, elles sont nécessairement entières.*

Car soit, s'il est possible, $\frac{a}{b}$ une racine de l'équation, a et b étant premiers entre eux. La substitution donnera

$$\frac{a^m}{b^m} + p\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + q\frac{a^{m-2}}{b^{m-2}} \ldots + t\frac{a}{b} + u = 0;$$

multipliant par b^{m-1} et transposant tous les termes, excepté le premier, dans le second membre, il vient

$$\frac{a^m}{b} = -(pa^{m-1} + qba^{m-2} + \ldots + tb^{m-2}a + ub^{m-1}).$$

Or, a et b étant premiers entre eux, $\frac{a^m}{b}$ est nécessairement une fraction irréductible, qui ne peut égaler le second membre, quantité entière. Donc l'équation proposée ne peut avoir de racine commensurable fractionnaire.

305. Transformation VII. *Changer une équation en une autre dont les racines soient égales à celles de la proposée augmentées ou diminuées d'une quantité donnée* h.

Prenons toujours l'équation donnée sous la forme (B) (293).

La transformée, devant avoir pour racines $a+h$, $b+h$, ... $l+h$, sera

$$(y-a-h)(y-b-h)(y-c-h)\ldots(y-l-h)=0,$$

qui se conclut de l'équation (B) en changeant x en $y-h$. En effet, la relation énoncée donne $y=x+h$, d'où $x=y-h$.

De même, si les racines de la transformée devaient égaler celles de la proposée diminuées de h, on ferait $y=x-h$, d'où $x=y+h$.

Mettant $y+h$ au lieu de x dans la proposée sous la forme (A) (293), on a pour la transformée

$$\text{(C)}\quad (y+h)^m+P(y+h)^{m-1}+Q(y+h)^{m-2}\ldots+T(y+h)+U=0.$$

Développant les diverses puissances du binôme $y+h$, il vient

$$\text{(D)}\left\{\begin{array}{l|l|l} y^m+mh & y^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}h^2 & y^{m-2}+\ldots+h^m \\ \quad +P & \quad +(m-1)Ph & \quad +Ph^{m-1} \\ & \quad +Q & \quad +Qh^{m-2} \\ & & \quad \cdot \\ & & \quad \cdot \\ & & \quad \cdot \\ & & \quad +Th \\ & & \quad +U \end{array}\right\}=0.$$

On peut vérifier que l'équation (C) satisfait à la condition énoncée. Car si l'on met $a-h$ au lieu de y dans l'équation (C), on trouve exactement le même résultat que si l'on met a au lieu de x dans l'équation (A). Donc si a est racine de celle-ci, $a-h$ est racine de l'équation (C).

306. TRANSFORMATION VIII. *Changer une équation en une autre qui manque d'un certain terme.*

Opérons comme dans le cas précédent, et substituons $y+h$ au lieu de x dans l'équation (A), en regardant h comme une indéterminée dont on pourra disposer à volonté, on obtiendra l'équation (D). Si l'on veut faire évanouir le second terme de cette équation, il suffira de poser

$$mh+P=0,\quad \text{d'où}\quad h=-\frac{P}{m};$$

or la relation $x = y + h$ devient alors

$$x = y - \frac{P}{m}.$$

D'où il résulte que, *pour faire disparaître le second terme d'une équation, il faut remplacer l'inconnue* x *par une nouvelle inconnue* y *augmentée du coefficient du second terme, pris avec un signe contraire, et divisé par le degré de l'équation.*

Les racines de la transformée sont évidemment égales à celles de la proposée augmentées de $\frac{P}{m}$, c'est-à-dire

$$a + \frac{P}{m},\quad b + \frac{P}{m},\quad c + \frac{P}{m},\ldots$$

Or (288) la somme des racines $a + b + c + \ldots = -P$; donc la somme des racines de la transformée sera

$$a + b + c \ldots + \frac{mP}{m} = -P + P = 0.$$

Par conséquent la transformée n'a pas de second terme.

Si l'on veut faire évanouir le troisième terme de la même équation (D), on posera

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} h^2 + (m-1)Ph + Q = 0.$$

Cette équation donnant, en général, deux valeurs pour n, il y a donc deux substitutions différentes qui transforment la proposée en une autre manquant de troisième terme.

De même l'évanouissement du quatrième terme dépendra d'une équation du troisième degré; ainsi de suite..

Enfin, si l'on veut faire évanouir le dernier terme, il faudra résoudre une équation tout à fait semblable à la proposée. En effet, lorsque l'équation (D) n'a pas de dernier terme, elle est satisfaite par $y = 0$, et a par conséquent une racine égale à zéro. Mais alors la relation $x = y + h$ devient $x = h$; donc h doit être une racine de la proposée, et ne peut ainsi être déterminé que par la résolution de cette équation.

Soit, par exemple, l'équation $x^3 - 6x^2 - 5x + 4 = 0$, que l'on veut changer en une autre manquant de second terme.

Posant $x = y + \frac{6}{3}$ ou $y + 2$, et substituant, il vient

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 - 5(y+2) + 4 = 0,$$

ou bien, en développant,

$$\left.\begin{array}{r} y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \\ -6y^2 - 24y - 24 \\ -5y - 10 \\ +4 \end{array}\right\} = 0,$$

ou enfin, toutes réductions faites, $y^3 - 17y - 22 = 0$.

307. *Remarque* I. Si l'on a déjà fait disparaître un terme d'une équation, ou s'il en manque un dans la proposée, on ne peut évidemment en faire évanouir un autre sans que le terme manquant ne rentre dans la transformée.

Car si l'on substitue $y + h$ au lieu de x dans l'équation

$$x^m + Qx^{m-2} + \ldots = 0$$

qui manque de second terme, il vient

$$(y+h)^m + Q(y+h)^{m-2} + \ldots = 0$$

ou bien

$$y^m + mhy^{m-1} + \left.\begin{array}{r} \dfrac{m(m-1)}{1.2}h^2 \\ +Q \end{array}\right| y^{m-2} + \ldots = 0;$$

et la valeur de h qui fera disparaître le terme en y^{m-2} étant différente de zéro, le terme en y^{m-1} se reproduira dans la transformée.

308. *Remarque* II. Si l'on voulait faire disparaître à la fois le second et le troisième terme d'une équation, on aurait en même temps les deux relations

$$mh + P = 0, \quad \frac{1}{2}m(m-1)h^2 + (m-1)Ph + Q = 0.$$

Prenant la valeur de h dans la première et la substituant dans la seconde, on a pour équation de condition

$$\frac{m(m-1)P^2}{2m^2} - \frac{(m-1)P^2}{m} + Q = 0,$$

ou, en réduisant,

$$Q - \frac{(m-1)P^2}{2m} = 0.$$

Donc les coefficients P et Q doivent être tels qu'ils satis-

fassent à cette relation. Par conséquent la question n'est possible que dans certains cas particuliers, et si l'on transporte dans l'équation (A) la valeur de Q donnée par l'équation de condition, on aura la forme générale des équations dont on peut faire évanouir à la fois le second et le troisième terme.

309. *Remarque générale.* Les huit transformations précédentes se sont effectuées facilement, parce qu'il existait une relation très-simple entre l'inconnue x de la proposée et l'inconnue y de la transformée. Lorsque cette relation est plus compliquée, on procède toujours de la même manière. Ainsi, en général, les racines a', b', c',... de la transformée devant être une certaine fonction $F(a)$ des racines a, b, c,.... de la proposée, on a évidemment $a'=F(a)$, $b'=F(b)$,.... et par conséquent $y=F(x)$. Tirant de cette équation la valeur de x, si c'est possible, et la substituant dans la proposée, on aura la transformée en y.

§ 2. *Polynômes dérivés. Théorie des racines égales.*

Polynômes dérivés.

310. On vient de voir (306) qu'on peut toujours faire disparaître un terme d'une équation en y substituant $y+h$ au lieu de x, et disposant convenablement de h dans la transformée. Nous allons montrer que les coefficients de cette transformée peuvent se déduire très-simplement les uns des autres au moyen d'une loi générale, ce qui nous conduira en même temps à considérer les *polynômes dérivés.*

Soit l'équation proposée

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=0,$$

qu'on écrit ordinairement, pour abréger, $X=0$ ou $F(x)=0$.

Remplaçons x par $h+y$, au lieu de $y+h$; alors la transformée, ordonnée suivant les puissances ascendantes de y, sera

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
h^m & + \quad mh^{m-1} & y + \quad m(m-1)h^{m-2} & y^2 + \ldots + y^m = 0 \\
+Ph^{m-1} & +(m-1)Ph^{m-2} & + \dfrac{(m-1)(m-2)}{2} Ph^{m-3} & \\
+Qh^{m-2} & +(m-2)Qh^{m-3} & + \dfrac{(m-2)(m-3)}{2} Qh^{m-4} & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
+Th & +T & & \\
+U & & &
\end{array}
$$

qu'on peut également déduire de l'équation (D) du n° 305, en ordonnant celle-ci selon les puissances ascendantes de y.

Posons, pour abréger.

$$
\begin{aligned}
H &= h^m + Ph^{m-1} + Qh^{m-2} \ldots + Th + U, \\
H' &= mh^{m-1} + (m-1)Ph^{m-2} + (m-2)Qh^{m-3} \ldots + T, \\
H'' &= m(m-1)h^{m-2} + (m-1)(m-2)Ph^{m-3} \\
&\quad + (m-2)(m-3)Qh^{m-4} \ldots
\end{aligned}
$$

....

La transformée deviendra

$$H + H'y + \frac{1}{2}H''y^2 \ldots + y^m = 0.$$

Or il est facile de voir que

1° *Le premier terme* H *s'obtient en remplaçant* x *par* h *dans le premier membre* X *ou* F (x) *de la proposée.*

2° *Le coefficient* H' *de* y *se forme du précédent* H, *en multipliant chaque terme de celui-ci par l'exposant de* h *dans ce terme et en diminuant cet exposant d'une unité.*

Comme U, dans le polynôme H, est équivalent à Uh^0, on voit que le terme U ne doit plus se trouver dans H', parce qu'il est multiplié par zéro.

3° *Le coefficient* $\frac{H''}{2}$ *de* y^2 *se forme du précédent* H', *en multipliant chaque terme de* H' *par l'exposant de* h *dans ce terme, diminuant ensuite l'exposant de* h *d'une unité, et divisant le produit par* 2, *nombre des termes précédents.*

Ainsi de suite; de sorte qu'en général

Le coefficient H_n *de la puissance* n *de* y *se forme du précédent* H_{n-1}, *en multipliant chacun des termes de* H_{n-1} *par l'exposant de* h *dans ce terme, diminuant ensuite l'exposant de* h *d'une unité, et divisant le produit par* n, *nombre des termes qui précèdent.*

Les polynômes successifs H, H', H''..., H_n, se déduisant ainsi les uns des autres, ont été, pour cette raison, nommés *polynômes dérivés* ou *fonctions dérivées.* Ainsi H' est le polynôme dérivé de H, H'' est le polynôme dérivé de H', etc. On peut dire aussi que H' est le premier polynôme dérivé de H, H'' le second polynôme dérivé de H, etc.

Selon que l'équation proposée est représentée par $X=0$ ou par $F(x)=0$, les dérivées successives du premier membre s'indiquent par X', X'', X'''..., ou $F'(x)$, $F''(x)$, $F'''(x)$... Dans ce dernier cas le développement ci-dessus s'écrit

$$F(x+y)=F(x)+F'(x)y+\frac{1}{2}F''(x)y^2+\frac{1}{2.3}F'''(x)y^3+...$$

et l'on a de même

$$F(x-y)=F(x)-F'(x)y+\frac{1}{2}F''(x)y^2-\frac{1}{2.3}F'''(x)y^3+...$$

311. Proposons-nous pour exemple de transformer l'équation

$$x^4+12x^3-7x^2+3x+5=0$$

en une autre privée de second terme, en faisant usage des polynômes dérivés. On posera $x=y-\frac{12}{4}$ ou $x=-3+y$, ce qui donnera une transformée de la forme

$$X+X'y+\frac{X''}{2}y^2+\frac{X'''}{2.3}y^3+y^4=0;$$

or, d'après la règle précédente les coefficients seront

$$X\ =(-3)^4+12(-3)^3-7(-3)^2+3(-3)+5=-310;$$
$$X'=4(-3)^3+36(-3)^2-14(-3)+3=+261,$$
$$\frac{X''}{2}=6(-3)^2+36(-3)-7=-61,$$
$$\frac{X'''}{2.3}=4(-3)+12=0.$$

Donc on aura pour transformée l'équation

$$y^4 - 61y^2 + 261y - 310 = 0.$$

312. D'après ce qui précède, il est facile de voir que si dans une équation $X = 0$ on substitue $x + y$ à la place de x, le coefficient de la première puissance de y sera la fonction dérivée du premier membre X.

On peut encore démontrer que *la première fonction dérivée* X' *de* X *égale la somme des quotients qu'on obtient en divisant* X *par chacun de ses facteurs du premier degré.*

Car si l'on met le premier membre X sous la forme

$$(x - a)(x - b)(x - c)\ldots(x - l),$$

en substituant $x + y$ au lieu de x, on aura le produit

$$(y + x - a)(y + x - b)(y + x - c)\ldots(y + x - l),$$

qu'on peut regarder comme formé de m facteurs binômes dont le premier terme commun est y, et dont les seconds termes sont $x - a$, $x - b$, ... $x - l$.

D'où il résulte que, dans le développement, le coefficient de la première puissance de y sera égal à la somme des produits de ces m seconds termes pris $m-1$ à $m-1$. Or ces produits s'obtiennent en divisant successivement X par chacun des facteurs simples $x - a$, $x - b$, ... $x - l$. Par conséquent on a

$$X' = \frac{X}{x-a} + \frac{X}{x-b} + \frac{X}{x-c} \ldots + \frac{X}{x-l}.$$

Théorie des racines égales.

313. Une des plus importantes applications des polynômes dérivés consiste dans la détermination des racines égales d'une équation donnée, ce qui forme un point essentiel de la théorie des équations.

Soit $X = 0$ une équation qui a des racines égales, ou, ce qui revient au même, dont le premier membre renferme des facteurs élevés à des puissances (286). X sera de la forme

$$X = (x - a)^n (x - b)^p \ldots (x - g)(x - h)\ldots;$$

et comme son polynôme dérivé X' doit égaler la somme des

quotients de X successivement divisé par chacun des facteurs du premier degré (312), il contiendra donc n fois le quotient de X par $x-a$, p fois celui de X par $x-b$, etc., de sorte qu'on aura

$$\begin{aligned}X' = & \; n(x-a)^{n-1}(x-b)^p \ldots (x-g)(x-h)\ldots \\ & + p(x-a)^n (x-b)^{p-1} \ldots (x-g)(x-h)\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (x-a)^n (x-b)^p \ldots (x-h)\ldots \\ & + (x-a)^n (x-b)^p \ldots (x-g)\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Or il est évident que X et X' sont divisibles par le produit

$$D = (x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}\ldots$$

uniquement composé des facteurs correspondants aux racines égales, chacun étant élevé à une puissance moindre d'une unité que dans X.

En outre, ce produit D est le plus grand commun diviseur de X et de X'. Car, s'il ne l'était pas, il faudrait qu'au moins l'un des facteurs $x-a$, $x-b$, ... $x-g$, $x-h$, ... de X pût diviser le quotient de X' par D, lequel est égal à

$$\begin{aligned} & n(x-b)\ldots(x-g)(x-h)\ldots \\ & + p(x-a)\ldots(x-g)(x-h)\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (x-a)(x-b)\ldots(x-h)\ldots \\ & + (x-a)(x-b)\ldots(x-g)\ldots\end{aligned}$$

Mais $x-a$ divise toutes les parties de cette somme, excepté la première; $x-b$ les divise toutes, excepté la seconde; ainsi des autres. Donc la somme entière n'est divisible par aucun de ces facteurs, et par conséquent le plus grand commun diviseur de X et de X' est D.

Lorsque l'équation $X=0$ n'a que des racines inégales, les exposants n, p, ... sont égaux à 1; alors le polynôme dérivé X' se réduit (312) à

$$(x-b)\ldots(x-g)(x-h)\ldots + (x-a)\ldots(x-g)(x-h)+\ldots$$

et en raisonnant comme tout à l'heure, on verra que X et X'

ne peuvent avoir aucun diviseur commun. En effet D se réduit alors à un nombre.

Par conséquent, *pour qu'une équation ait des racines égales, il faut et il suffit que le premier membre et son polynôme dérivé aient un diviseur commun; et leur plus grand commun diviseur sera le produit de tous les facteurs correspondants aux racines égales, élevés chacun à une puissance moindre d'une unité que dans la proposée.*

314. Voyons maintenant comment il faut s'y prendre pour trouver les racines égales d'une équation $X=0$.

On cherchera d'abord le plus grand commun diviseur D de X et du dérivé X'. Si D est numérique, toutes les racines de $X=0$ sont inégales. Dans tout autre cas, D sera le produit des facteurs égaux de X, pris chacun avec un exposant moindre d'une unité.

Désignons par X_1 le produit des facteurs simples de X; par X_2 le produit des facteurs doubles de X, mais pris chacun une seule fois; de même par X_3 le produit des facteurs triples; par X_4 le produit des facteurs quadruples; et supposons, pour plus de simplicité, que X ne renferme pas de facteurs d'un degré plus élevé que 4.

En cherchant de même le plus grand commun diviseur D_1 de D et de son dérivé, puis le plus grand commun diviseur D_2 de D_1 et de son dérivé, on aura

$$X=X_1X_2^2X_3^3X_4^4,\quad D=X_2X_3^2X_4^3,\quad D_1=X_3X_4^2,\quad D_2=X_4,$$

et le polynôme X_4 ne contenant que des facteurs inégaux, D_2 sera premier avec son dérivé.

Cela posé, si l'on divise chacune des égalités ci-dessus par la suivante, il vient

$$\frac{X}{D}=X_1X_2X_3X_4,\quad \frac{D}{D_1}=X_2X_3X_4,\quad \frac{D_1}{D_2}=X_3X_4,\quad D_2=X_4,$$

et divisant de même chacune de celles-ci par la suivante, on a

$$\frac{XD_1}{D^2}=X_1,\quad \frac{DD_2}{D_1^2}=X_2,\quad \frac{D_1}{D_2^2}=X_3,\quad D_2=X_4;$$

les facteurs X_1, X_2, X_3, X_4, étant ainsi déterminés, la résolution

de l'équation $X=0$ est ramenée à celle des quatre suivantes

$$X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=0,\ X_4=0,$$

dont la première sert à connaître les racines simples de la proposée, la seconde les racines doubles, la troisième les racines triples, et la quatrième les racines quadruples.

Si l'un des polynômes X_1, X_2, X_3... se réduit à un nombre, on en conclura que la proposée n'a pas de racines du degré de multiplicité correspondant au rang de ce polynôme.

315. Appliquons cette méthode à l'équation

$$x^7+x^6-5x^5-5x^4+7x^3+7x^2-3x-3=0.$$

Cherchant le plus grand commun diviseur entre le premier membre et son polynôme dérivé, on trouve

$$D=x^3+x^2-x-1;$$

d'où il résulte que la proposée a des racines égales. Cherchant le plus grand commun diviseur D_1 entre D et son dérivé D', on trouve

$$D_1=x+1.$$

Par conséquent l'équation a des racines triples, et l'on est certain qu'elle n'en a pas d'un degré de multiplicité supérieur au troisième, puisque D_1 est premier avec son dérivé D'_1.

Ainsi, d'après la notation adoptée précédemment, on aura

$$\begin{aligned} X &= X_1X_2^2X_3^3 = x^7+x^6-5x^5-5x^4+\ldots,\\ D &= X_2X_3^2 = x^3+x^2-x-1,\\ D_1 &= X_3 = x+1. \end{aligned}$$

Divisant chacune de ces égalités par la suivante, il vient

$$\begin{aligned} X_1X_2X_3 &= x^4-4x^2+3,\\ X_2X_3 &= x^2-1,\\ X_3 &= x+1. \end{aligned}$$

Divisant de nouveau chacune de ces égalités par la suivante, on trouve

$$X_1=x^2-3,\ X_2=x-1,\ X_3=x+1.$$

Par conséquent, la résolution de l'équation proposée, qui peut se mettre sous la forme

$$(x^2-3)(x-1)^2(x+1)^3=0,$$

est ramenée à celle des trois équations

$$x^2-3=0,\ x-1=0,\ x+1=0,$$

qui donnent $x=\pm\sqrt{3},\quad x=1,\quad x=-1.$

La proposée a donc les deux racines simples $+\sqrt{3}, -\sqrt{3}$, une racine double égale à 1, et une racine triple égale à -1.

316. Étant donnée une équation $X=0$, qui a des racines égales, si l'on veut trouver une équation renfermant les racines inégales de la proposée et ses racines égales, prises seulement une fois chacune, on cherche, comme ci-dessus, le plus grand commun diviseur D de X et de X′, et l'on égale à zéro le quotient de X divisé par D. L'équation cherchée est donc $\frac{X}{D}=0$, où bien (314) $X_1X_2X_3X_4=0$.

Si l'on veut avoir deux équations dont l'une ne renferme que les racines inégales et l'autre les racines égales prises une fois chacune, après avoir obtenu, comme tout à l'heure, le quotient Q de X divisé par D, on cherche le plus grand commun diviseur D′ entre D et Q, lequel doit égaler le produit des facteurs égaux de X, mais abaissés au premier degré. En divisant Q par D′, on a le produit des facteurs inégaux. Ainsi les deux équations cherchées sont

$$D'=0,\quad \frac{Q}{D'}=0.$$

Remarque. Lorsqu'on connaît les facteurs égaux ou les racines égales d'une équation $X=0$, on détermine aisément le degré de multiplicité n de l'une d'entre elles a, en la substituant dans les dérivées successives $X', X'', X''', \ldots X_{n-1}, X_n$ de X. Car il résulte du principe démontré plus haut (313) que $x-a$ sera facteur une fois de moins dans X′ que dans X, deux fois de moins dans X″ que dans X,... n fois de moins dans X_n que dans X, c'est-à-dire que la dérivée X_n ne contiendra pas le facteur $x-a$.

Donc la substitution $x=a$ ne réduira pas à zéro la dérivée X_n, mais seulement toutes les précédentes. Par conséquent, si l'on fait $x=a$ dans les dérivées successives de X, l'ordre de

la dérivée qui ne se réduira pas à zéro indiquera le degré de multiplicité de la racine a.

317. Lorsqu'une équation $X=0$ du degré m n'a qu'une seule racine a répétée m fois, le polynôme X est divisible par son dérivé X', et le quotient, étant égalé à zéro, donne une équation du premier degré qui détermine la racine multiple de $X=0$. Car alors le plus grand commun diviseur D entre X et X' est égal à X', et $\frac{X}{D}$ doit donner (316) toutes les racines de $X=0$.

Si l'on cherche la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation

$$x^4-Px^3+Qx^2-Rx+S=0$$

pour qu'elle ait ses quatre racines égales, on trouve les trois équations

$$8Q-3P^2=0,\ 2PQ-12R=0,\ 16S-PR=0,$$

qui donnent $Q=\frac{3P^2}{8}$, $R=\frac{P^3}{16}$, $S=\frac{P^4}{16.16}$.

Substituant, on trouve pour l'équation demandée

$$x^4-Px^3+\frac{3P^2}{8}x^2-\frac{P^3}{16}x+\frac{P^4}{16.16}=0,$$

où le coefficient P reste arbitraire. La racine quadruple est

$$x=\frac{P}{4}.$$

Pour que l'équation $x^3+Qx+R=0$ ait deux racines égales on trouve la condition $R^2=\frac{-4Q^3}{27}$.

318. Si tous les coefficients numériques d'une équation $X=0$ sont commensurables, les polynômes X_1, X_2, $X_3\ldots$, obtenus par des opérations qui ne peuvent introduire aucune quantité irrationnelle, n'auront aussi que des coefficients commensurables. Donc si l'une des racines de $X=0$ est répétée n fois, toutes les autres racines étant à des degrés de multiplicité différents, cette racine sera commensurable. Il suit de là que toute équation du troisième degré à coefficients com-

mensurables, qui a des racines égales, en a au moins une commensurable. Car si les trois racines sont égales, on voit, d'après la marche des calculs précédents, qu'elles seront toutes trois commensurables. S'il y a deux racines égales, on pourra les séparer, et la troisième sera nécessairement commensurable. De là il résulte que toute équation du troisième degré qui n'a pas de racines commensurables ne peut admettre de racines égales. L'équation du cinquième degré jouit aussi des mêmes propriétés, ce qu'il est facile de reconnaître en examinant les différents cas qui peuvent se présenter.

Quant à l'équation du quatrième degré, si elle a des racines égales incommensurables, elle aura nécessairement deux racines doubles, et son premier membre sera un carré. En effet, l'équation ne peut alors offrir que les quatre cas suivants:

$$(x-a)^2(x-b)(x-c)=0,\ (x-a)^2(x-b)^2=0,$$
$$(x-a)^3(x-c)=0,\ (x-a)^4=0.$$

Dans les 1er, 3e et 4e cas on peut séparer les racines égales, mais non dans le 2e cas, qui est donc le seul où toutes les racines peuvent être incommensurables; mais alors le premier membre est un carré parfait.

SECTION III.

DE L'ÉLIMINATION ET DE SES PRINCIPALES APPLICATIONS.

§ 1er. *Élimination entre deux ou plusieurs équations d'un degré quelconque à deux inconnues.*

319. Nous avons dit (11) que le degré d'une équation entre plusieurs inconnues est la somme des exposants des inconnues prise dans le terme où cette somme est la plus forte. Ceci suppose, comme nous l'admettrons ici, que l'équation numé-

rique ou algébrique ne contient que des termes entiers et rationnels par rapport aux inconnues. Alors l'équation générale du degré m entre deux inconnues x et y, doit contenir tous les termes où la somme des exposants de x et de y ne surpasse point m. Si donc on transpose tous les termes dans le premier membre, et qu'on ordonne suivant les puissances décroissantes de l'une des inconnues, x par exemple, en réunissant, pour chaque puissance de x, en un seul facteur, la somme des quantités qui multiplient cette puissance, on pourra mettre l'équation générale du degré m sous la forme

$$\text{(A)}\quad Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Hx + K = 0.$$

Puisque m est le degré de l'équation, A doit être indépendant de y; B ne peut contenir aucune puissance de y supérieure à la première, et par conséquent est de la forme $b + b_1 y$; C ne peut contenir aucune puissance de y supérieure à la seconde, et par conséquent est de la forme $c + c_1 y + c_2 y^2$, ainsi de suite; enfin K doit être un polynôme de la forme

$$k + k_1 y + k_2 y^2 \ldots + k_m y^m.$$

Lorsque l'équation ne manque d'aucun terme, ses coefficients sont nécessairement de la forme indiquée, sans qu'elle cesse d'être du degré m. Par conséquent, l'équation générale (A) peut encore se mettre sous la forme plus précise

$$\text{(B)}\quad Ax^m + (b + b_1 y)x^{m-1} + (c + c_1 y + c_2 y^2)x^{m-2} + \ldots$$
$$+ (k + k_1 y + k_2 y^2 \ldots + k_m y^m) = 0,$$

dans laquelle toutes les lettres A, b, b_1, c, c_1, c_2, ... représentent des quantités connues.

Le nombre des termes est évidemment égal à

$$1 + 2 + 3 \ldots + (m + 1) \text{ ou à } \frac{(m+2)(m+1)}{2}.$$

Si l'équation manquait de quelques termes, il faudrait, dans l'équation générale, supposer leurs coefficients égaux à zéro. Alors l'équation serait *incomplète*.

Quoiqu'on n'altère pas une équation en divisant tous ses termes par l'un des coefficients, on ne peut néanmoins supposer l'un d'eux, A par exemple, égal à l'unité; car alors l'équation

ne contiendrait plus celles qui manquent de premier terme, puisqu'on ne peut pas faire $1=0$; par conséquent elle ne serait plus générale.

Mais lorsqu'on veut déterminer les coefficients d'après des conditions données, on peut supposer l'équation divisée par l'un des coefficients; et alors le nombre des indéterminées égale le nombre des termes moins un, c'est-à-dire

$$\frac{(m+2)(m+1)}{2}-1=\frac{m(m+3)}{2}.$$

Tel est le nombre des conditions nécessaires pour déterminer une équation complète du degré m à deux inconnues. Cependant s'il arrivait que l'équation demandée ne dût pas contenir le terme de l'équation générale, dont le coefficient est supposé égal à 1, les valeurs des autres coefficients se présenteraient sous la forme de l'infini. C'est pour cela qu'on préfère ordinairement laisser en évidence tous les coefficients de l'équation générale; alors, en les déterminant, l'un d'eux reste toujours arbitraire, et les autres sont exprimés en fonction de celui-ci, qui disparaît de l'équation comme facteur commun à tous les termes.

320. Toute équation d'un degré quelconque entre deux inconnues x et y est susceptible d'une infinité de solutions. On les obtient en attribuant à l'une des inconnues, y par exemple, toutes les valeurs possibles, et en déduisant de l'équation, pour chacune d'elles, les valeurs correspondantes de l'autre inconnue x. Si maintenant on a une seconde équation entre les mêmes inconnues x et y, en donnant de même à y toutes les valeurs possibles, on aura une nouvelle suite des valeurs correspondantes de x, et en faisant le tableau de toutes les valeurs de x fournies par chaque équation, on reconnaîtra quelles sont celles qui, leur étant communes, satisfont à la fois aux deux équations; de sorte qu'en les accouplant avec les valeurs correspondantes de y, on aura tous les *couples* de valeurs de x et de y, formant les solutions des deux équations proposées. Or on peut se dispenser de calculer ces deux suites de valeurs, au moyen de procédés connus en général sous le

nom d'*élimination* (84), parce qu'ils reviennent à déduire, d deux équations à deux inconnues, une équation n'en renfer mant plus qu'une seule, et qu'on appelle, pour cette raison l'*équation finale*.

Soient les deux équations $A = o$, $B = o$, entre deux in connues x et y, et soit $x = \alpha$, $y = \beta$, une de leurs solution communes : ces équations seront satisfaites par la substitutioı de $x = \alpha$, $y = \beta$. Mais si l'on ne substitue d'abord que la va leur β de y, on aura deux équations en x seulement, $X = o$ $X' = o$, qui devront être satisfaites par $x = \alpha$. Par conséquent les polynômes X et X' auront un commun diviseur contenan le facteur $x - \alpha$; et réciproquement, toute valeur β de y, qu fait acquérir aux polynômes X et X' un commun diviseur D contenant le facteur $x - \alpha$, fait partie d'un des couples de solutions communes aux deux équations proposées. Car en posant $D = o$, chaque valeur telle que $x = \alpha$, déduite de cette équation, réduit à zéro les polynômes X et X'; et par conséquent les équations $A = o$, $B = o$ sont satisfaites par $x = \alpha$, $y = \beta$. Ainsi, en général, si l'on a deux équations à deux inconnues,

Pour qu'une valeur attribuée à l'une des inconnues convienne à ces équations, il faut et il suffit que la substitution de cette valeur fasse acquérir aux premiers membres un commun diviseur fonction de l'autre inconnue; et si l'on égale ce commun diviseur à zéro, on obtient une équation dont les racines sont les valeurs correspondantes de l'autre inconnue.

321. Lorsqu'on a trouvé l'équation $D = o$, et déterminé toutes ses racines, qui sont des valeurs de x, en les substituant dans les deux équations proposées, celles-ci acquerront un commun diviseur en y; de sorte qu'en l'égalant à zéro, on aura une équation en y dont les racines formeront, avec les valeurs précédentes de x, les systèmes de solutions communes aux deux équations proposées. D'après cela, si une certaine valeur de x satisfaisait aux proposées, indépendamment de toute valeur de y, on pourrait évidemment lui accoupler telle valeur de y qu'on voudrait; et par conséquent les proposées auraient une infinité de solutions. Mais s'il arrivait que, par

suite du procédé employé, l'équation $D=0$ renfermât, outre les *bonnes* valeurs de x, des valeurs étrangères aux équations données, on les reconnaîtrait sûrement à ce qu'elles ne feraient pas acquérir à ces équations un commun diviseur en y, et par conséquent elles devraient être rejetées.

On a donc cherché dans ces derniers temps à perfectionner les méthodes d'élimination de manière que l'équation finale renfermât uniquement toutes les bonnes valeurs d'une inconnue, sans complication de valeurs étrangères. C'est à quoi sont parvenus M. Larabit en 1832, et plus clairement M. Sarus en 1834, comme nous l'indiquerons plus loin.

322. Mais avant tout, nous allons faire voir comment, dans certains cas, on peut très-simplement parvenir à l'équation finale.

D'abord lorsque l'une des deux équations est du premier degré par rapport à l'une des inconnues x, en opérant comme on l'a vu plus haut (85), on prendra dans cette équation la valeur de x qui sera de la forme

$$x=F(y),$$

et satisfera nécessairement à cette proposée indépendamment de toute valeur particulière de y.

Substituant cette valeur de x dans l'autre proposée, on obtient une équation seulement en y, qui est l'équation finale, puisque ses racines doivent évidemment satisfaire à la seconde proposée. Si donc on sait déterminer ces racines, en les mettant à la place de y dans $x=F(y)$, on aura les valeurs correspondantes de x, qui avec celles de y formeront les solutions des deux équations données.

On peut encore employer le même procédé, lorsque l'une des proposées n'est que du second degré par rapport à une inconnue x, pourvu que les deux valeurs qu'on en déduit en fonction de y soient rationnelles, sans quoi la substitution dans l'autre équation introduirait, en général, des coefficients incommensurables.

Soient, pour exemple, les équations

$$(1)\qquad 10x^2+xy-4y^2-38=0,$$

$$(2)\qquad 3x^2-y^2-11=0.$$

Prenant la valeur de x dans la seconde, on a

$$x = \pm \frac{1}{3}\sqrt{3(y^2+11)},$$

et substituant dans la première, il vient

$$-2y^2 \pm y\sqrt{3(y^2+11)} - 4 = 0.$$

Pour résoudre cette équation, il faut nécessairement, comme dans tous les cas semblables, isoler le radical dans un membre, et ensuite élever les deux membres au carré, ce qui donne d'abord

$$(3) \qquad \pm y\sqrt{3(y^2+11)} = 2y^2 + 4,$$

puis, toutes réductions faites,

$$(4) \qquad y^4 - 17y^2 + 16 = 0;$$

cette équation, résolue comme celles du second degré, donne

$$y = +4,\ y = -4,\ y = +1,\ y = -1.$$

Maintenant, pour avoir les valeurs de x qui doivent réellement correspondre à ces quatre valeurs de y, il faut remarquer que l'équation (3), à cause du signe $\pm$ affectant le radical, équivaut aux deux suivantes

$$(5) \qquad +y\sqrt{3(y^2+11)} = 2y^2 + 4,$$

$$(6) \qquad -y\sqrt{3(y^2+11)} = 2y^2 + 4.$$

Par conséquent, si l'on pouvait les résoudre séparément, on obtiendrait les valeurs de x correspondantes à celles de y provenant de l'équation (5), en substituant celles-ci dans l'équation

$$x = +\frac{1}{3}\sqrt{3(y^2+11)};$$

et de même on aurait les valeurs de x correspondantes aux valeurs de y provenant de l'équation (6), en substituant celles-ci dans l'équation

$$x = -\frac{1}{3}\sqrt{3(y^2+11)}.$$

Or, en substituant les quatre valeurs de y dans les équations (5) et (6), on reconnaît aisément que les deux valeurs $y = +4$, $y = +1$ satisfont à la première, et que les deux

valeurs $y=-4$, $y=-1$ satisfont à la seconde; d'où il résulte que les équations (1) et (2) ont les quatre solutions suivantes :

$$\begin{cases} y=+4 \\ x=+3 \end{cases} \quad \begin{cases} y=+1 \\ x=+2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-4 \\ x=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-1 \\ x=-2. \end{cases}$$

Remarque. Dans ce cas, comme dans tout autre analogue, on peut résoudre plus simplement les équations proposées par le procédé indiqué plus haut (152).

A cet effet, on retranche l'équation (2) multipliée par 10 de l'équation (1) multipliée par 3; ce qui donne

$$x=\frac{2y^2+4}{3y}.$$

Substituant cette valeur de x dans l'équation (2), on obtient la même équation finale que ci-dessus

$$y^4-17y^2+16=0,$$

qui donne pour les quatre valeurs de y

$$+4, -4, +1, -1.$$

Celles-ci, étant substituées dans l'équation ci-dessus en x, donnent pour les valeurs correspondantes de cette inconnue

$$+3, -3, +2, -2.$$

323. Enfin, la résolution d'un système d'équations, qui peuvent se décomposer en facteurs, se ramène à celle de plusieurs autres systèmes plus simples.

Supposons, par exemple, qu'on ait ramené les deux équations proposées à la forme

$$(4x^2-5y)(3x^2y+5y^3)=0,$$
$$(3x^3+2y^2x)(4y^2-6x)=0.$$

Il est clair qu'on obtiendra toutes leurs solutions, en déterminant tous les couples de valeurs de x et de y qui rendront à la fois nuls un facteur de la première équation et un facteur de la seconde, c'est-à-dire en résolvant séparément les quatre systèmes d'équations

$$\begin{cases} 4x^2-5y=0 \\ 3x^3+2y^2x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2-5y=0 \\ 4y^2-6x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2y+5y^3=0 \\ 3x^3+2y^2x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2y+5y^3=0 \\ 4y^2-6x=0, \end{cases}$$

ce que nous engageons le lecteur à faire.

324. Voici maintenant un exemple de deux équations q
ont un facteur commun.

Soient les équations

$$x^3+y^3-yx^2-y^2x-4xy-4y^2=0,$$
$$2x^2+xy-y^2=0.$$

Elles peuvent s'écrire

$$(x+y)(x^2-2xy+y^2-4y)=0,$$
$$(x+y)(2x-y)=0.$$

On satisfera donc aux deux équations en posant $x+y=$ (
ce qui donne un nombre illimité de solutions.

Pour avoir les autres solutions, il faut résoudre le systèm
des équations

$$x^2-2xy+y^2-4y=0,\ 2x-y=0,$$

ce qui donne d'abord le couple de valeurs $x=0$, $y=0$, déj
compris dans l'équation $x+y=0$, et, en outre, le coupl

$$x=8,\ y=16.$$

Élimination par la méthode du plus grand commun diviseur

325. Proposons-nous maintenant de résoudre deux équations quelconques en x et y

$$M=0,\ N=0.$$

D'abord il convient d'examiner s'il est possible de simplifie le système des équations proposées. Ordonnons donc le polynôme M par rapport à y, et cherchons le plus grand commun diviseur U des coefficients des diverses puissances de y; U sera fonction de x, et l'on pourra diviser M par U, ce qui donnera un quotient entier. Ordonnons le quotient par rapport à x, et cherchons le plus grand commun diviseur U′ des coefficients des diverses puissances de x; U′ sera fonction de y, et en divisant le quotient par U′ on aura un nouveau quotient entier U″ fonction de x et de y; de sorte que le polynôme M, décomposé en ses trois facteurs, sera

$$M=UU'U'';$$

et en nommant V, V′, V″, les trois facteurs analogues du polynôme N, on aura de même

$$N = VV'V''.$$

Il peut arriver que U et V aient un commun diviseur D, U′ et V′ un commun diviseur D′, U″ et V″ un commun diviseur D″; alors en nommant Q, q, Q′, q', Q″, q'' les quotients respectifs des six facteurs par ces diviseurs, les polynômes M et N pourront se mettre sous la forme

$$M = DD'D''.QQ'Q'',\ N = DD'D''.qq'q''.$$

Cela posé, il est clair qu'on satisfait d'abord aux équations proposées en posant successivement $D = 0$, $D' = 0$, $D'' = 0$. Or la première équation, ne contenant qu'une inconnue x, déterminera un nombre limité de valeurs de x, à chacune desquelles on pourra joindre une infinité de valeurs de y. De même, la seconde équation, ne contenant que y, déterminera un nombre limité de valeurs de y, à chacune desquelles on pourra joindre une infinité de valeurs de x. Enfin la troisième équation contenant les deux inconnues x et y, l'une d'elles pourra recevoir une infinité de valeurs arbitraires, qui détermineront autant de valeurs correspondantes de l'autre. De sorte que les trois facteurs D, D′, D″ des équations proposées leur donnent d'abord une infinité de solutions.

Cherchons maintenant les autres solutions dépendantes des facteurs Q, Q′, Q″, q, q', q''. Il semble qu'on pourrait satisfaire aux deux proposées en égalant à zéro l'un des facteurs de la première avec un des facteurs de la seconde. Mais d'abord les facteurs Q et q ne contenant que la même inconnue x, et d'ailleurs n'ayant plus de facteur commun, ne peuvent devenir en même temps nuls pour aucune valeur de x. De même on ne peut avoir à la fois $Q' = 0$, $q' = 0$. D'un autre côté, si l'on égale à zéro deux facteurs dont l'un ne contienne qu'une inconnue, on aura deux équations dont la solution ne dépendra que de celle d'une équation à une inconnue.

Il reste donc à considérer les équations

$$Q'' = 0,\ q'' = 0,$$

c'est-à-dire deux équations contenant deux inconnues x et y,

et débarrassées de tous leurs facteurs communs, qui peuvent comme on vient de le voir, être fonctions soit de x, soit de y soit de x et de y à la fois. C'est ce que nous supposerons dan ce qui va suivre.

326. Soient donc à résoudre les deux équations

$$A = o, B = o,$$

supposées simplifiées comme on vient de l'indiquer, et d'ailleurs entières par rapport aux inconnues x et y.

Il s'agit d'en déduire une équation à une inconnue x qui donne toutes les valeurs convenables de x et n'en contienne pas d'étrangère. Or, d'après le principe établi plus haut (320), il faut et il suffit que ces valeurs de x, substituées dans les équations proposées, fassent acquérir aux premiers membres, A et B un commun diviseur en y. On est donc naturellement conduit à opérer sur les polynômes A et B comme si l'on cherchait leur plus grand commun diviseur en y.

Ayant ordonné les polynômes A et B par rapport à y, supposons que le degré de A en y soit plus élevé que celui de B, ou au moins égal. Divisons A par B, jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste R d'un degré moins élevé en y que le diviseur B; supposons le quotient Q entier par rapport à x, sans qu'on ait eu besoin de multiplier aucun des dividendes par un facteur fonction de x, on aura

$$A = BQ + R,$$

et alors il résultera de cette égalité que toutes les valeurs de x et de y qui satisfont aux proposées $A = o$, $B = o$, donneront aussi $R = o$, puisque le quotient Q ne peut devenir infini pour des valeurs finies de x ou de y. Par la même raison, toutes les valeurs, qui satisfont aux équations $B = o$, $R = o$, donneront aussi $A = o$. On peut donc remplacer le système $A = o$, $B = o$, par le système $B = o$, $R = o$, qui est plus simple, puisque R est d'un degré moins élevé que B et à plus forte raison que A.

Mais il n'en est plus de même si, pour avoir un quotient entier par rapport à x, il a fallu multiplier d'abord le polynôme A ou l'un des dividendes partiels par un facteur c fonc-

tion de x. Car alors, en désignant le quotient par Q et le reste par R, on aura

$$cA = BQ + R,$$

d'où l'on conclura que toutes les valeurs de x et de y qui satisfont aux équations $B=0$, $R=0$, satisfont de même aux équations $cA=0$, $B=0$, et que réciproquement celles qui satisfont aux équations $cA=0$, $B=0$, donnent en même temps $R=0$. Il résulte de là que le système $B=0$, $R=0$ est équivalent au système $cA=0$, $B=0$. Mais comme ce dernier système fournit les deux suivants $A=0$, $B=0$ et $c=0$, $B=0$, il s'ensuit que les solutions des deux équations $B=0$, $R=0$, comprennent non-seulement toutes celles des proposées $A=0$, $B=0$, mais encore celles des équations $c=0$, $B=0$, qui sont nécessairement étrangères à l'équation $A=0$, puisque les polynômes A et B n'ont plus de facteurs communs. Les polynômes B et R n'ont également aucun facteur commun; car s'il en existait un, il devrait aussi se trouver dans A et dans B; on peut donc opérer sur les équations $B=0$, $R=0$ comme sur les proposées. Par conséquent si l'on divise B par R, jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste R' d'un degré moins élevé que R par rapport à y, en appelant Q' le quotient, on aura

$$B = RQ' + R',$$

d'où l'on conclura, comme tout à l'heure, que le système $R=0$, $R'=0$ contient toutes les solutions du système $B=0$, $R=0$, c'est-à-dire celles des deux systèmes $A=0$, $B=0$ et $c=0$, $B=0$, mais qu'il contient en outre d'autres solutions étrangères au système $A=0$, $B=0$, si, pour effectuer la division de B par R, il a fallu multiplier B par un facteur fonction de x.

Comme, en continuant ainsi, les exposants de y diminuent dans les restes successifs, on finira par obtenir un système de deux équations $R_{n-1}=0$, $R_n=0$, dont l'une, $R_n=0$, sera nécessairement indépendante de y; et remontant de proche en proche, on conclura, comme précédemment, que ce dernier système comprend toutes les solutions du système $A=0$, $B=0$, plus les solutions étrangères provenant de l'introduction des

facteurs fonctions de x, nécessaires pour n'avoir que des quotients entiers par rapport à x.

Or l'équation $R_n = o$, ne contenant que la seule inconnue x, est par conséquent l'équation finale cherchée; et en admettant qu'on sache la résoudre, on pourra par suite déterminer toutes les solutions du système $R_{n-1} = o$, $R_n = o$, qui comprennent celles du système $A = o$, $B = o$.

Ce qui précède suppose encore que, pour effectuer les divisions, on n'a supprimé aucun facteur fonction de x dans l'un des restes successifs. Par exemple, si le reste R, obtenu en divisant A par B, contenait un facteur r fonction de x, en appelant R_1 le quotient de R par r, on aurait $R = rR_1$; alors le système des équations $A = o$, $B = o$, serait équivalent aux deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} B = o \\ r = o \end{cases} \qquad \begin{cases} B = o \\ R_1 = o. \end{cases}$$

Or il est facile de résoudre le premier système, puisque r ne contient que x; on n'a donc plus à considérer que le second $B = o$, $R_1 = o$, qu'on traitera comme on l'a vu plus haut.

Mais alors il est clair que l'équation finale ne contiendra pas les valeurs de x qui satisfont au système $B = o$, $r = o$, et par suite aux équations proposées. Il faudra donc ajouter ces solutions, et de même les solutions analogues qui peuvent manquer dans l'équation finale, parce qu'on aura supprimé des facteurs fonctions de x dans l'un des diviseurs successifs. Ainsi, en général, le procédé indiqué conduira, non pas à une seule équation en x, mais à plusieurs équations dont quelques-unes pourront donner pour x des valeurs étrangères au système proposé.

327. Il est facile de conclure des explications précédentes que si l'on avait pu obtenir l'équation finale $R_n = o$ au moyen de divisions successives n'exigeant aucune suppression ou introduction de facteurs fonctions de x, cette équation finale serait *parfaite*, c'est-à-dire donnerait absolument toutes les valeurs de x satisfaisant aux équations $A = o$, $B = o$, sans en contenir aucune qui leur fût étrangère.

Nous allons maintenant faire voir comment on peut trouver une telle équation finale, et nous suivrons la marche adoptée par M. Sarrus, dans sa brochure sur l'élimination. Mais nous remarquerons d'abord qu'avant de résoudre deux équations en x et y, il vaut mieux préalablement supprimer tous leurs facteurs communs (325). Cependant nous nous contenterons d'admettre que les équations étant ordonnées par rapport à une inconnue, y par exemple, n'ont plus de facteur dépendant de y seul; c'est uniquement ce que suppose le théorème dont il s'agit.

328. Soient donc les équations

$$A=0, B=0,$$

où ni A ni B n'ont plus de facteurs fonctions de y seul, le degré de B en y ne surpassant pas celui de A. Désignons par c le produit des facteurs par lesquels il faut multiplier A, pour qu'on puisse diviser A par B, de manière à obtenir un reste de degré moindre que B sans avoir de quotient fractionnaire en x. Soit q ce quotient, et Rr le reste mis sous la forme de deux facteurs dont l'un r est le produit de tous les facteurs de ce reste dépendant seulement de x. En continuant l'opération à l'aide des mêmes notations, on désignera par c_1 le produit des facteurs par lesquels on devra multiplier B pour que la division de B par R conduise à un reste R_1r_1 d'un degré moindre que R, le quotient q_1 étant entier par rapport à x, et r_1 étant le produit de tous les facteurs du reste dépendant seulement de x; ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste r_n indépendant de y. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que ce reste soit donné par la troisième opération, mais la démonstration serait tout à fait analogue si ce reste était donné par la quatrième ou, en général, par la n^e opération.

Le troisième reste r_2 étant indépendant de y, on aura les égalités

$$(1) \qquad \begin{cases} cA = Bq + Rr \\ c_1B = Rq_1 + R_1r_1 \\ c_2R = R_1q_2 + r_2. \end{cases}$$

Soit d le plus grand commun diviseur de c et de r, d_1 celui

de $\frac{cc_1}{d}$ et de r_1, d_2 celui de $\frac{cc_1c_2}{dd_1}$ et de r_2, il s'agit de démontrer que les systèmes suivants

$$(2)\qquad \begin{cases} B=0 & R=0 & R_1=0 \\ \frac{r}{d}=0 & \frac{r_1}{d_1}=0 & \frac{r_2}{d_2}=0 \end{cases}$$

donneront toutes les solutions du système proposé $A=0$, $B=0$, sans donner aucune solution qui lui soit étrangère.

A cet effet, nous diviserons le théorème en deux parties qui s'énonceront ainsi :

Théorème. I. *Les solutions des systèmes d'équations* (2) *conviennent toutes au système proposé.*
II. *Les solutions du système proposé sont toutes comprises dans celles des systèmes d'équations* (2).

I[re] **Partie.** Considérons séparément chacun des trois systèmes d'équations (2).

1° Toutes les solutions du système $B=0$, $\frac{r}{d}=0$ conviennent au système $A=0$, $B=0$.

En effet, si l'on divise la première égalité du système (1) par d, plus grand commun diviseur de c et de r, il vient

$$(3)\qquad \frac{c}{d}A=\frac{q}{d}B+\frac{r}{d}R,$$

d'où il suit que qB est divisible par d; or, par hypothèse, B est premier avec q; donc q est divisible par d. Alors l'égalité (3) prouve que toutes les valeurs de x et de y qui satisfont au système $B=0$, $\frac{r}{d}=0$, doivent annuler $\frac{c}{d}A$; et comme $\frac{c}{d}$ et $\frac{r}{d}$ sont des fonctions de x seul n'ayant plus aucun facteur commun, il en résulte que ces valeurs annulent A, et satisfont ainsi à l'équation $A=0$.

Donc toutes les solutions du système $B=0$, $\frac{r}{d}=0$, *conviennent au système* $A=0$, $B=0$.

2° Toutes les solutions du système $R=0$, $\frac{r_1}{d_1}=0$, conviennent au système $A=0$, $B=0$.

Pour le faire voir, nous aurons besoin de deux relations, l'une entre A, R, $\frac{r_1}{d_1}$, et l'autre entre B, R, $\frac{r_1}{d_1}$.

D'abord nous obtiendrons la première en multipliant l'égalité (3) par c_1, et en remplaçant, dans le second membre, $c_1 B$ par sa valeur, telle que la donne la seconde des égalités (1), il vient alors

$$\frac{cc_1}{d}A=\left(\frac{c_1 r+qq_1}{d}\right)R+\frac{q}{d}r_1 R_1.$$

Mais r et q étant divisibles par d, la quantité $\frac{c_1 r+qq_1}{d}$ est entière; de plus elle est divisible par d_1, qui est le plus grand commun diviseur de $\frac{cc_1}{d}$ et de r_1, et qui est, en outre, premier avec R. Donc en divisant par d_1 les deux membres de l'égalité précédente, et faisant, pour abréger, $\frac{q}{d}=M$, $\frac{c_1 r+qq_1}{dd_1}=M_1$, on a pour la première relation cherchée l'égalité

$$(4)\qquad \frac{cc_1}{dd_1}A=M_1 R+MR_1\frac{r_1}{d_1}.$$

Maintenant, pour avoir une relation entre B, R et $\frac{r_1}{d_1}$, multiplions la deuxième des égalités (1) par $\frac{c}{d}$, il viendra

$$\frac{cc_1}{d}B=\frac{cq_1}{d}R+\frac{c}{d}R_1 r_1;$$

d'où il résulte que d_1, qui est le plus grand commun diviseur de $\frac{cc_1}{d}$ et de r_1, et, qui est, en outre, premier avec R, doit diviser $\frac{cq_1}{d}$. Donc en divisant par d les deux membres de l'égalité précédente, et faisant, pour abréger, $\frac{c}{d}=N$, $\frac{cq_1}{dd_1}=N_1$, on a

pour la seconde relation cherchée l'égalité

$$(5) \qquad \frac{cc_1}{dd_1} B = N_1 R + NR_1 \frac{r_1}{d_1}.$$

Les égalités (4) et (5) prouvent que toutes les valeurs de x et de y, qui satisfont au système $R = 0$, $\frac{r_1}{d_1} = 0$, doivent annuler $\frac{cc_1}{dd_1} A$ et $\frac{cc_1}{dd_1} B$; mais $\frac{cc_1}{dd_1}$ et $\frac{r_1}{d_1}$ sont des fonctions de x seul qui ne peuvent avoir de facteur commun; donc les valeurs dont il s'agit doivent annuler A et B, et par conséquent satisfont aux équations $A = 0$, $B = 0$.

Donc, *toutes les solutions du système* $R = 0$, $\frac{r_1}{d_1} = 0$, *conviennent au système* $A = 0$, $B = 0$.

3° Les solutions du système $R_1 = 0$, $\frac{r_2}{d_2} = 0$, conviennent au système $A = 0$, $B = 0$.

Commençons par chercher deux relations l'une entre A, R_1, $\frac{r_2}{d_2}$, l'autre entre B, R_1, $\frac{r_2}{d_2}$.

D'abord on obtient la première en multipliant l'égalité (4) par c_2, et remplaçant $c_2 R$ par sa valeur telle que la donne la troisième des égalités (1); il vient alors

$$\frac{cc_1c_2}{dd_1} A = \left(M_1 q_2 + Mc_2 \frac{r_1}{d_1}\right) R_1 + M_1 r_2;$$

d'où il résulte que d_2, qui est le plus grand commun diviseur de $\frac{cc_1c_2}{dd_1}$ et de r_2, et qui est, en outre, premier avec R_1, doit diviser $M_1 q_2 + Mc_2 \frac{r_1}{d_1}$. Donc, si l'on représente ce quotient par M_2, en divisant l'égalité précédente par d_2, on a pour la première relation cherchée

$$(6) \qquad \frac{cc_1c_2}{dd_1d_2} A = M_2 R_1 + M_1 \frac{r_2}{d_2}.$$

De même, pour obtenir une relation entre B, R_1 et $\frac{r_2}{d_2}$, on multiplie l'égalité (5) par c_2; on remplace $c_2 R$ par sa valeur telle

que la donne la troisième des égalités (1), et il vient

$$\frac{cc_1e_2}{dd_1}B = \left(N_1q_2 + Nc_2\frac{r_1}{d_1}\right)R_1 + N_1r_2;$$

d'où l'on conclut comme tout à l'heure que le multiplicateur de R_1 est divisible par d_2. En désignant ce quotient par N_2, et divisant l'égalité précédente par d_2, on a pour la deuxième relation cherchée

$$(7)\qquad \frac{cc_1e_2}{dd_1d_2}B = N_2R_1 + N_1\frac{r_2}{d_2}.$$

Or les égalités (6) et (7) prouvent que toutes les valeurs de x et de y qui satisfont au système $R_1 = 0$, $\frac{r_2}{d_2} = 0$, doivent annuler $\frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}A$ et $\frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}B$; donc elles annuleront aussi A et B, puisque $\frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}$ et $\frac{r_2}{d_2}$ sont des fonctions de x seul n'ayant aucun facteur commun.

Donc, *toutes les solutions du système* $R_1 = 0$, $\frac{r_2}{d_2} = 0$ *conviennent au système* $A = 0$, $B = 0$.

Donc, selon la première partie de l'énoncé, *toutes les solutions des systèmes d'équations* (2) *conviennent au système* $A = 0$, $B = 0$.

IIe Partie. Il faut maintenant faire voir qu'un système quelconque de valeurs satisfaisant aux équations $A = 0$, $B = 0$, fait partie des systèmes de valeurs fournies par les équations (2).

Établissons d'abord les trois relations qui nous seront nécessaires entre A, B et chacune des quantités r, r_1, r_2. On pourrait les déduire immédiatement des égalités (1); mais il est plus simple de les tirer des égalités (3), (4),..., où une partie des calculs se trouve déjà effectuée.

La première relation cherchée est l'égalité (3), qui peut s'écrire

$$(8)\qquad NA - MB = R\frac{r}{d}$$

en transposant le terme en B, et se rappelant qu'on a fait

$$\frac{c}{d} = N,\quad \frac{q}{d} = M.$$

La seconde relation, savoir celle entre A, B, r_1, s'obtient en éliminant R entre les égalités (4) et (5). Cette élimination s'effectue très-simplement en retranchant la seconde multipliée par A de la première multipliée par B, ce qui donne

$$(M_1B - N_1A)R + (MB - NA)R_1\frac{r_1}{d_1} = 0.$$

Mais d'après l'égalité (8) on a $MB - NA = -R\frac{r}{d}$; en substituant et supprimant le facteur commun R, on a pour la seconde relation

$$(9)\qquad N_1A - M_1B = -R_1\frac{rr_1}{dd_1}.$$

Enfin la troisième relation, savoir celle entre A, B, r_2, s'obtient en éliminant R de la même manière entre les égalités (6) et (7), c'est-à-dire en retranchant la seconde multipliée par A de la première multipliée par B, ce qui donne

$$(M_2B - N_2A)R_1 + (M_1B - N_1A)\frac{r_2}{d_2} = 0;$$

mais, d'après l'égalité (9), on a

$$M_1B - N_1A = R_1\frac{rr_1}{dd_1};$$

substituant et supprimant le facteur commun R_1, on a pour la troisième relation

$$(10)\qquad (N_2A - M_2B) = \frac{rr_1r_2}{dd_1d_2}.$$

Cette dernière relation prouve que si une solution $x = \alpha$, $y = \beta$ convient aux équations $A = 0$, $B = 0$, la valeur $x = \alpha$ doit rendre nul le produit $\frac{r}{d}\cdot\frac{r_1}{d_1}\cdot\frac{r_2}{d_2}$, et par suite l'un des facteurs $\frac{r}{d}, \frac{r_1}{d_1}, \frac{r_2}{d_2}$.

Si cette valeur $x = \alpha$ donne $\frac{r}{d} = 0$, la solution $x = \alpha$, $y = \beta$ se trouve évidemment parmi celles du système $B = 0$, $\frac{r}{d} = 0$.

Si la valeur $x = \alpha$ donne $\frac{r_1}{d_1} = 0$, sans qu'on ait $\frac{r}{d} = 0$, on

voit par l'égalité (8) que la solution $x=\alpha, y=\beta$, doit donner $R=0$, et, par conséquent, se trouver parmi les solutions du système $R=0, \frac{r_1}{d_1}=0$.

Si la valeur $x=\alpha$ donne $\frac{r_2}{d_2}=0$, sans qu'on ait $\frac{r}{d}=0$, ni $\frac{r_1}{d_1}=0$, on voit par l'égalité (9) que la solution $x=\alpha, y=\beta$ doit donner $R_1=0$, et, par conséquent, se trouver parmi les solutions du système $R_1=0, \frac{r_2}{d_2}=0$.

Donc, *toutes les solutions du système* $A=0, B=0$, *sont comprises dans celles des systèmes d'équations* (2).

Les équations $\frac{r}{d}=0, \frac{r_1}{d_1}=0, \frac{r_2}{d_2}=0$, donnant toutes les bonnes valeurs de x, il en résulte que l'équation finale est

$$\frac{r}{d}\cdot\frac{r_1}{d_1}\cdot\frac{r_2}{d_2}=0,$$

comme on peut aussi le conclure immédiatement de la relation (10). Car elle montre que chacune des solutions du système $A=0, B=0$, doit satisfaire à l'équation $\frac{r}{d}\cdot\frac{r_1}{d_1}\cdot\frac{r_2}{d_2}=0$, et que réciproquement cette dernière équation, ou celles qu'on en déduit, $\frac{r}{d}=0, \frac{r_1}{d_1}=0, \frac{r_2}{d_2}=0$, doivent donner toutes les bonnes valeurs de x.

329. *Remarque.* Si l'on se rappelle que la quantité c représente le facteur par lequel il a fallu multiplier A pour effectuer, sans quotient fractionnaire, la division de A par B, on voit qu'on peut toujours faire en sorte que c et r n'aient aucun facteur commun. Car on a conclu de l'équation notée (3), $\frac{c}{d}A=\frac{q}{d}B+\frac{r}{d}R$, où d représente le plus grand commun diviseur de c et de r, que le quotient q est entier; d'où il suit qu'on peut effectuer la division de A par B en multipliant A par un facteur $\frac{c}{d}$ plus petit que c, et premier avec le multiplicateur de R.

On peut de même faire en sorte que c_1 soit premier avec r_1, et c_2 avec r_2; d'où il résulte que l'équation $\frac{r}{d}=0$ sera la même que $r=0$; alors on devra prendre pour d_1 le plus grand commun diviseur de c et de r_1, et pour d_2 celui de $\frac{cc_1}{d_1}$ et de r_2.

339. Voici maintenant plusieurs exemples, où les premiers membres des équations ne se décomposant pas en facteurs, il faut immédiatement procéder aux divisions.

EXEMPLE I. Soient les équations

$$y^3+3xy^2+(3x^2-x+1)y+x^3-x^2+2x=0,$$
$$y^2+2xy+x^2-x=0.$$

Première division.

$$\begin{array}{l|l}
y^3+3xy^2+(3x^2-x+1)y+x^3-x^2+2x & y^2+2xy+x^2-x \\
\underline{-y^3-2xy^2-(x^2-x)y} & \overline{y+x} \\
\quad xy^2+(2x^2+1)y+x^3-x^2+2x & \\
\quad \underline{-xy^2-2x^2y-x^3+x^2} & \\
\qquad\quad y+2x &
\end{array}$$

Deuxième division.

$$\begin{array}{l|l}
y^2+2xy+x^2-x & y+2x \\
\underline{-y^2-2xy} & \overline{y} \\
\qquad x^2-x &
\end{array}$$

Le reste x^2-x, indépendant de y, ayant été obtenu sans introduction ni suppression d'aucun facteur dans le cours de l'opération, l'équation finale $x^2-x=0$ donnera, conjointement avec $y+2x=0$, toutes les solutions des équations proposées; ces solutions sont donc les deux couples $x=0$, $y=0$, et $x=1$, $y=-2$.

EXEMPLE II. Soient les équations

$$3y^2+(14x-9)y+2x^2+8x+6=0,$$
$$y^2+(4x+1)y+4x^2+2x-2=0.$$

Première division.

$$\begin{array}{l|l}
3y^2+(14x-9)y+2x^2+8x+6 & y^2+(4x+1)y+4x^2+2x-2 \\
\underline{-3y^2-(12x+3)y-12x^2-6x+6} & \overline{3} \\
+(2x-12)y-10x^2+2x+12 &
\end{array}$$

ou $(x-6)y-5x^2+x+6$.

Pour faire la deuxième division il faudra multiplier le nouveau dividende par $x-6$, et encore le dividende suivant par $x-6$.

Deuxième division.

$$\begin{array}{l|l}
(x-6)y^2+(4x^2-23x-6)y+4x^3 & (x-6)y-5x^2+x+6 \\
\qquad\qquad -22x^2-14x+12 & \overline{y+(9x^2-24x-12)} \\
\underline{-(x-6)y^2+(5x^2-x-6)y} & \\
\qquad +(9x^2-24x-12)y+4x^3-22x^2-14x+12 & \\
\text{ou } +(x-6)(9x^2-24x-12)y+4x^4-46x^3+118x^2+96x-72 & \\
\underline{-(x-6)(9x^2-24x-12)y+45x^4-129x^3-90x^2+156x+72} & \\
\qquad\qquad +49x^4-175x^3+28x^2+252x &
\end{array}$$

Égalant à zéro ce reste indépendant de y, on a l'équation finale cherchée.

Il est facile de voir qu'on n'a pas introduit de solution étrangère aux proposées en multipliant deux dividendes par $x-6$, puisque le reste en x n'est pas divisible par $x-6$. Cela tient d'ailleurs à ce qu'on ne peut pas satisfaire en même temps aux deux équations $x-6=0$, $(x-6)y-5x^2+x+6=0$. Car si l'on met dans celle-ci la valeur $x=6$ tirée de la première, son premier membre se réduit à un nombre.

L'équation finale ne donnant ainsi que de bonnes valeurs de x, on aura toutes les solutions des deux proposées en résolvant les deux équations

$$49x^4+175x^3+28x^2+252x=0,$$
$$(x-6)y-5x^2+x+6=0.$$

D'abord la première est satisfaite par $x=0$; divisant par x, on a l'équation

$$49x^3-175x^2+28x+252=0,$$

qui est satisfaite par $x=-1$. Divisant par $x+1$, il vient

$$49x^2-224x+252=0;$$

d'où
$$x=2,\quad x=\frac{18}{7}.$$

Les quatre valeurs de l'équation finale sont donc

$$x=0,\quad x=-1,\quad x=2,\quad x=\frac{18}{7};$$

et en les substituant dans l'équation

$$(x-6)y-5x^2+x+6=0,$$

on aura pour les valeurs correspondantes de y

$$y=1,\quad y=0,\quad y=-3,\quad y=\frac{50}{7}.$$

Ainsi les deux équations proposées ont les quatre solutions suivantes :

$$\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\ y=-3\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{18}{7}\\ y=\dfrac{50}{7}.\end{cases}$$

Exemple III. Soient les équations

$$y^2+(8x-7)y+x^2-13x+12=0,$$
$$y^2-(4x-5)y+x^2-x=0.$$

Première division.

$$\begin{array}{l|l} y^2+(8x-7)y+x^2-13x+12 & y^2-(4x-5)y+x^2-x \\ \hline -y^2+(4x-5)y-x^2+x & 1 \\ \hline (12x-12)y-12x+12 & \end{array}$$

Ce reste, décomposé en facteurs, est égal à $12(x-1)(y-1)$. D'où il résulte que le système des deux équations proposées peut se remplacer par les deux systèmes suivants :

$$1^\circ\begin{cases}x-1=0\\ y^2-(4x-5)y+x^2-x=0.\end{cases}\qquad 2^\circ\begin{cases}y-1=0\\ y^2-(4x-5)y+x^2-x=0.\end{cases}$$

Chacun d'eux peut se résoudre *à priori*, et l'on obtient les quatre solutions suivantes :

$$\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}\quad\begin{cases}y=1\\ x=2\end{cases}\quad\begin{cases}y=1\\ x=3.\end{cases}$$

331. *Remarque* I. Lorsque le reste indépendant de y, désigné (328) par r_2, est nul, le polynôme R_1 est le plus grand commun diviseur de A et de B, et divise, en outre, le premier reste R. Dans ce cas toutes les solutions de $R_1=0$ satisfont au système proposé $A=0$, $B=0$, dont les autres solutions

sont fournies par les deux équations $\frac{A}{R_1}=0$, $\frac{B}{R_1}=0$. Pour voir ce que deviennent alors les systèmes d'équations (2), il suffit de diviser par R_1 les égalités (3), (4), (5), (8), (9), et l'on obtient de nouvelles égalités ne différant des premières que parce qu'elles renferment les quotients $\frac{A}{R_1}$, $\frac{B}{R_1}$, $\frac{R}{R_1}$, $\frac{R_1}{R_1}$, au lieu des quantités A, B, R, R_1. Raisonnant sur ces égalités exactement de même que sur les précédentes (328), on prouve que toutes les solutions du système $\frac{A}{R_1}=0$, $\frac{B}{R_1}=0$, sont données, sans aucune solution étrangère, par les systèmes suivants :

$$\begin{cases}\dfrac{B}{R_1}=0\\ \dfrac{r}{d}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{R}{R_1}=0\\ \dfrac{r_1}{d_1}=0.\end{cases}$$

Voici un exemple où l'un des restes est nul.

Exemple IV. Soient les équations

$$y^3-xy^2-(x^2+6x+9)y+x^3+6x^2+9x=0$$
$$xy^2+(3x+4)y-x^3-3x^2-4x=0.$$

Pour effectuer la division, il faut multiplier le dividende, ainsi que le premier reste, par x.

Première division.

$$\begin{array}{ll|l}
 & y^3-xy^2-(x^2+6x+9)y+x^3+6x^2+9x & xy^2+(3x+4)y-x^3-3x^2-4x \\ \cline{3-3}
\text{ou} & xy^3-x^2y^2-(x^3+6x^2+9x)y+x^4+6x^3+9x^2 & y-(x^2+3x+4) \\
 & -xy^3-(3x+4)y^2+(x^3+3x^2+4x)y & \\ \hline
 & -(x^2+3x+4)y^2-(3x^2+5x)y+x^4+6x^3+9x^2 & \\
\text{ou} & -(x^2+3x+4)xy^2-(3x^3+5x^2)y+x^5+6x^4+6x^3 & \\
 & +(x^2+3x+4)xy^2+(3x^3+13x^2+24x+16)y-(x^5+6x^4+17x^3+24x^2+16x) & \\ \hline
 & +(8x^2+24x+16)y-(8x^3+24x^2+16x) &
\end{array}$$

Ce reste peut se mettre sous la forme

$$8(x^2+3x+2)(y-x).$$

Or, si l'on divise le diviseur précédent par $x-y$, on trouve pour quotient $xy+x^2+3x+4$ et zéro pour reste.

Il suit de là que les équations proposées ont $y-x$ pour facteur commun, et sont par conséquent satisfaites par toutes

les solutions de l'équation indéterminée

$$y - x = 0.$$

Le système

$$x^2 + 3x + 2 = 0,$$
$$xy + x^2 + 3x + 4 = 0$$

donne les autres solutions, qui sont

$$\begin{cases} x = +2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$$

Lorsque deux équations ont, comme dans cet exemple, des facteurs communs, ces facteurs donnent lieu à une infinité de solutions, ou bien à des solutions indéterminées. Mais lorsqu'il n'y a plus de facteur commun, les divers systèmes, qu'on peut substituer au proposé, n'offrent jamais de solutions indéterminées.

Exemple V. Soient à résoudre les deux équations

$$xy^4 - (x-6)y^3 + (x^2-6)y^2 - (x^3-6x^2)y - 6x^2 = 0,$$
$$2y^4 - 5xy^3 + 5x^2y^2 - 5x^3y + 3x^4 = 0.$$

On trouvera qu'elles ont le facteur commun $y^2 + x^2$, qui donne un nombre indéterminé de solutions. Les autres systèmes de valeurs sont

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{6} \\ y = \pm\sqrt{6} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

332. *Remarque* II. Il peut arriver que les termes en x se détruisent dans le dernier reste, qui se réduit alors à un nombre. Comme ce reste ne peut devenir égal à zéro, il en résulte que les équations proposées sont incompatibles, si l'on n'a d'ailleurs supprimé aucun facteur commun susceptible de donner des solutions.

Ce cas se rencontre dans l'exemple suivant :

Exemple VI. Soient à résoudre les deux équations

$$xy^2 - (x^2 - 3x - 1)y + x = 0, \quad y^2 - x^2 + 3 = 0.$$

Le dernier reste est $+3$. Donc les équations sont incompatibles, ce que leur examen peut d'ailleurs faire reconnaître.

En effet la première se décompose en

$$(y^2 - x^2 + 3)\,xy + y + x = 0,$$

qui, en vertu de la seconde, devrait donner

$$y + x = 0.$$

Mais d'après la seconde on a

$$y^2 - x^2 = -3 \qquad \text{ou}\ (y + x)(y - x) = -3,$$

d'où $\quad y + x = \dfrac{-3}{y - x},\quad$ et par suite $\quad \dfrac{-3}{y - x} = 0;$

or on ne pourrait satisfaire à cette équation qu'en posant

$$-3 = 0.$$

333. *Remarque* III. Nous omettons les solutions infinies, qui ne peuvent s'obtenir par les procédés indiqués plus haut, et ne sont utiles, en général, que dans les applications de l'Algèbre à la Géométrie. Au reste, on peut obtenir les valeurs d'une inconnue x, qui correspondent à des valeurs infinies de y, en faisant d'abord $y = \frac{1}{z}$ et ensuite $z = 0$.

334. *Remarque* IV. Si l'on veut obtenir les solutions communes à n équations contenant n inconnues, il faudra combiner une des n équations avec les $n - 1$ autres, de sorte qu'en éliminant une même inconnue dans chaque système particulier, on aura $n - 1$ équations ne contenant plus que $n - 1$ inconnues. En opérant toujours de même, on obtiendra chaque fois un système d'équations dont le nombre, ainsi que celui des inconnues, sera moindre d'une unité que dans le système précédent; de sorte qu'on finira par obtenir une équation à une inconnue, ou l'équation finale. Lorsqu'on aura déterminé ses valeurs, on en déduira celles des autres inconnues au moyen de substitutions faites convenablement. Mais on doit éviter le plus possible de se livrer à ces sortes d'éliminations qui réclament les soins les plus minutieux pour écarter les solutions fausses, et qui d'ailleurs exigent, en général, des calculs d'une longueur désespérante. C'est pourquoi nous n'entrerons dans aucun détail à cet égard.

Voici, sur le degré de l'équation finale, un théorème dû à

Bezout, et qui a été rigoureusement démontré par M. Poisson dans le onzième cahier du journal de l'École Polytechnique.

Si entre m *équations contenant* m *inconnues on élimine* m—1 *inconnues, le degré de l'équation finale est tout au plus égal au produit des degrés de ces mêmes équations.*

§ 2. *Applications à l'équation aux carrés des différences et à l'évanouissement des radicaux. Résolution de l'équation générale du troisième degré.*

Application de l'élimination à la recherche de l'équation aux carrés des différences.

335. Une des plus importantes applications de l'élimination consiste dans la recherche de l'équation aux différences ; ce qui donne lieu au problème suivant :

Problème. *Étant donnée une équation d'un degré quelconque à une inconnue, en déduire une autre dont les racines soient les différences entre celles de la proposée prises deux à deux.*

Représentons l'équation proposée du degré m par

$$F(x)=0$$

et ses m racines par a, b, c,.....

Supposons d'abord qu'on demande une équation dont les racines soient les différences entre la racine a et les $m-1$ autres ; il faudra poser

$$y=x-a, \qquad \text{d'où } x=a+y;$$

et en mettant cette valeur de x dans $F(x)=0$, on aura

$$F(a+y)=0.$$

Si on développe le premier membre comme on l'a vu plus haut (310), et qu'on représente par $F'(a)$, $F''(a)$, $F'''(a)$,.... les dérivées successives de $F(a)$, il vient

$$F(a)+F'(a)y+\frac{1}{2}F''(a)y^2+\frac{1}{2.3}F'''(a)y^3+\text{etc.}=0.$$

Mais $F(a)=0$, puisque x est racine de $F(x)=0$. En sup-

primant le terme $F(a)$, l'équation précédente devient divisible par y, et a par conséquent une racine nulle. En effet, d'après la relation ci-dessus, y représente la différence entre la racine a et toutes les racines de la proposée, y compris a; donc l'une des valeurs de y est $a-a$ ou zéro. On supprime cette racine nulle, en divisant par y, et l'on a l'équation

$$F'(a)+\frac{1}{2}F''(a)y+\frac{1}{2.3}F'''(a)y^2+\text{etc.}=0,$$

dont les racines sont les différences entre a et les $m-1$ autres racines de la proposée.

Or, si l'on y remplace a par b, on aura de même une nouvelle équation dont les racines seront les différences entre b et les $m-1$ autres racines de la proposée; ainsi de suite. De sorte qu'en définitive on aura m équations dont les racines seront respectivement les différences entre chacune des racines a, b, c,.... et les $m-1$ autres.

Par conséquent, les différences des racines de l'équation proposée, prises 2 à 2, sont les valeurs de y qu'on obtiendrait en mettant successivement chacune de ces racines au lieu de x dans l'équation

$$F'(x)+\frac{1}{2}F''(x)y+\frac{1}{2.3}F'''(x)y^2+\ldots=0;$$

ce qui revient évidemment à substituer dans cette équation la valeur de x tirée de l'équation proposée, c'est-à-dire à éliminer x entre ces deux équations. Effectuant cette élimination, en ayant soin de ne pas supprimer de bonnes valeurs et de ne pas en introduire de fausses, on obtient l'équation finale en y qui est l'équation cherchée, et se nomme *l'équation aux différences*.

336. On voit que l'équation aux différences est du degré $m(m-1)$; car le nombre de ses racines doit égaler celui des arrangements qu'on peut former avec m lettres prises 2 à 2.

En outre, cette équation ne peut contenir que des puissances paires de l'inconnue; car si elle admet une racine $\alpha=a-b$, elle aura nécessairement une autre racine $-\alpha=b-a$. Par conséquent, ses racines sont 2 à 2 égales et de signes con-

traires; de sorte que le premier membre pourra se décomposer en produits partiels de deux facteurs ayant la forme

$$(y-\alpha)(y+\alpha)=y^2-\alpha^2.$$

Soit $m(m-1)=2n$; alors l'équation aux différences pourra s'écrire

$$y^{2n}+Py^{2n-2}+Qy^{2n-4}\ldots+Ty^2+U=0;$$

et si l'on pose $y^2=z$, elle deviendra

$$z^n+Pz^{n-1}+Q^{2n-2}\ldots+Tz+U=0.$$

Cette dernière équation, ayant pour racines les carrés des différences des racines de la proposée, se nomme l'*équation aux carrés des différences.*

337. Si l'on veut appliquer ce qui précède à l'équation générale du troisième degré qui est de la forme

$$x^3+Px^2+Qx+R=0,$$

on remarquera d'abord que l'équation aux différences et l'équation aux carrés des différences ne changent pas, lorsqu'on augmente ou qu'on diminue d'une même quantité toutes les racines de la proposée. Si donc celle-ci a un second terme, on pourra d'abord le faire disparaître (306), et chercher ensuite l'équation aux différences de la transformée, ce qui abrégera les calculs.

Ainsi, dans notre exemple, on prendra simplement l'équation

$$x^3+Qx+R=0.$$

On formera ses dérivées qui donneront, pour résultat de la substitution de $x+y$ au lieu de x, l'équation

$$3x^2+3xy+y^2+Q=0.$$

Éliminant x entre ces deux équations, on trouvera pour l'équation aux différences

$$y^6+6Qy^4+9Q^2y^2+4Q^3+27R^2=0,$$

et pour l'équation aux carrés des différences

$$z^3+6Qz^2+9Q^2z+4Q^3+27R^2=0.$$

Pour l'équation particulière $x^3-4x^2+5x-4=0$, l'équation aux carrés des différences est

$$9z^3-18z^2-91z+532=0.$$

Application de l'élimination à l'évanouissement des radicaux.

338. Nous avons vu (302) que si l'on a une équation à une inconnue x renfermant des monômes fonctions de x affectés de radicaux, on peut aisément les faire disparaître; mais le procédé indiqué n'est plus applicable, si les équations contiennent des radicaux affectant des polynômes fonctions d'une ou de plusieurs inconnues. Il faut alors un autre procédé pour faire évanouir les radicaux, et c'est l'élimination qui le fournit.

Supposons qu'on ait à résoudre une équation contenant des radicaux quelconques, ou plus généralement m équations à m inconnues, ces équations contenant n quantités radicales différentes en valeur et en indice. Si l'on égale chaque quantité radicale à une nouvelle inconnue, on obtient n équations qu'on peut immédiatement débarrasser des radicaux, en élevant les deux membres de chacune d'elles à la puissance marquée par l'indice de son radical. Remplaçant alors, dans les équations primitives, chaque radical par l'inconnue qui la représente, on aura en tout $m+n$ équations à coefficients rationnels; de sorte que si l'on élimine d'abord entre elles les n inconnues introduites, il restera m équations qui serviront à déterminer les m inconnues primitives.

Au reste, les méthodes d'élimination sont si compliquées qu'on doit toujours s'efforcer d'en éviter l'emploi, même lorsqu'on veut faire disparaître les radicaux d'une seule équation à une inconnue.

339. Soit, pour exemple, l'équation

$$\sqrt[3]{-x+2}-\sqrt{x-1}-1=0.$$

Posant $\sqrt[3]{2-x}=y,\ \sqrt{x-1}=z,$

ce qui donne $2-x=y^3,\ x-1=z^2,$

la proposée devient $y-z=1.$

Il s'agit d'éliminer y et z entre les trois équations précédentes.

La dernière donne $z=y-1$; substituant cette valeur dans

l'avant-dernière, on a

$$y^2 - 2y - x + 2 = 0.$$

Éliminant y entre cette équation et l'équation $2 - x = y^3$, on trouve

$$x^3 - 13x^2 + 32x - 20 = 0.$$

On obtient le même résultat en isolant le radical cubique dans un membre, et procédant par des formations successives de puissances. Car la proposée peut s'écrire

$$\sqrt[3]{-x+2} = \sqrt{x-1} + 1.$$

En élevant les deux membres au cube, et transposant les termes, on a

$$4(1-x) = (x+2)\sqrt{x-1}.$$

Alors, en élevant les deux membres au carré, on trouve l'équation ci-dessus

$$x^3 - 13x^2 + 32x - 20 = 0.$$

Cette équation ayant pour racines $x = 1$, $x = 2$, $x = 10$, il en résulte que la proposée admet ces trois solutions.

Il est à remarquer que la racine $x = 1$ est la seule qui satisfasse à l'équation, quand on considère uniquement la valeur arithmétique des radicaux. Car en y substituant $x = 2$ et $x = 10$, on trouve

$$-\sqrt{1} - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{-8} - \sqrt{9} - 1 = 0,$$

ou bien, en se bornant à la valeur arithmétique du radical carré,

$$-1 - 1 = 0, \; -2 - 4 = 0.$$

Mais ces mêmes valeurs vérifient la proposée, lorsqu'on y change le signe du radical $\sqrt{x-1}$.

Si aucune des valeurs de x données par l'équation finale n'eût satisfait à la proposée en considérant seulement les valeurs arithmétiques des radicaux, alors, sous ce point de vue, l'équation eût été impossible.

340. Le procédé indiqué en second lieu est bien plus simple que le premier fourni par l'élimination, et doit toujours lui être

préféré lorsqu'il conduit au but. Mais malheureusement il ne fait évanouir les radicaux que dans un petit nombre de cas. En outre, on ne doit pas perdre de vue que l'équation rationnelle, à laquelle il conduit, doit donner toutes les valeurs de l'inconnue qui conviennent non-seulement à l'équation proposée, mais encore à toutes celles qu'on peut en déduire, en ayant égard aux différentes déterminations des radicaux. En effet, lorsqu'on égale chaque radical à une inconnue, et qu'on forme ensuite, pour chaque équation, les puissances marquées par l'indice du radical, on obtient des équations qui restent les mêmes pour toutes les déterminations des radicaux, et doivent par conséquent les donner toutes. D'ailleurs, elles ne peuvent admettre aucune autre solution, car l'indice du radical étant n, on aura obtenu une équation du degré n qui n'est décomposable que d'une seule manière en n facteurs du premier degré. Or ceux-ci donnent précisément les n valeurs du radical.

Voici les trois principaux cas où le procédé de l'élévation aux puissances fait disparaître les radicaux :

1° Lorsqu'une équation ne contient qu'un radical, comme on l'a déjà vu plus haut (322);

2° Lorsqu'une équation ne renferme que deux radicaux dont l'un est du second degré.

Il faut alors isoler dans un membre le radical du plus fort indice, élever les deux membres à la puissance marquée par cet indice, puis isoler le radical carré, et former le carré. Le résultat sera toujours débarrassé de radicaux, parce que les puissances d'un radical carré ne donnent aucune nouvelle quantité radicale.

Par exemple, l'équation

$$\sqrt[3]{P}=\sqrt{Q}+R$$

donne $$(R^3+3QR-P)^2=(3R^2+Q)^2Q.$$

3° Lorsqu'une équation ne contient que deux radicaux cubiques, comme

$$P=\sqrt[3]{Q}+\sqrt[3]{R}.$$

Car en élevant au cube on a

$$P^3 = Q + R + 3\left(\sqrt[3]{Q}\right)^2\sqrt[3]{R} + 3\sqrt[3]{Q}\left(\sqrt[3]{R}\right)^2,$$

ou $$P^3 - Q - R = 3\sqrt[3]{Q}\sqrt[3]{R}\left(\sqrt[3]{Q} + \sqrt[3]{R}\right).$$

En élevant encore au cube, après avoir remplacé $\sqrt[3]{Q} + \sqrt[3]{R}$ par P, on a l'équation rationnelle du neuvième degré

$$(P^3 - Q - R)^3 = 27P^3QR.$$

Remarque. Ce dernier cas revient évidemment à former une équation rationnelle qui ait pour racine $x = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$. L'équation cherchée est du neuvième degré, parce que, d'après la nature du procédé employé, elle doit donner les racines de trois équations différentes du troisième degré, comme on le verra ci-après. Donc, réciproquement, les racines de l'équation du troisième degré seront exprimées par des formules semblables à celle ci-dessus. Nous allons montrer comment on peut les obtenir.

* *Résolution de l'équation générale du troisième degré.*

341. Supposons qu'on ait fait disparaître le second terme de l'équation générale du troisième degré, et, pour éviter les fractions, qu'elle soit alors

$$x^3 + 3px + 2q = 0,$$

p et q étant des quantités réelles.

Le moyen le plus simple de la résoudre consiste à poser $x = y + z$, dont le cube donne

$$x^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3,$$

ou bien $$x^3 - 3yz.x - (y^3 + z^3) = 0.$$

Pour que cette équation soit identique avec la proposée, il faut poser les égalités $yz = -p$, $y^3 + z^3 = -2q$; et comme de la première on déduit $y^3z^3 = -p^3$, on voit que y^3 et z^3 sont les deux racines de l'équation du second degré en t

$$t^2 + 2qt - p^3 = 0,$$

qui se nomme en particulier la *réduite* de l'équation proposée.

Les racines de la réduite sont

$$t = -q \pm \sqrt{q^2 + p^3};$$

mais comme on peut prendre indifféremment l'une d'elles pour y^3 ou pour z^3, on aura, par exemple,

$$y^3 = -q + \sqrt{q^2 + p^3}, \quad z^3 = -q - \sqrt{q^2 + p^3},$$

d'où $\quad y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2+p^3}}, \quad z = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2+p^3}};$

donc $\quad x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2+p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2+p^3}}.$

Dans cette formule, chacun des radicaux carrés n'est susceptible que d'une seule détermination, et chaque radical cubique, au contraire, paraît au premier abord en avoir trois; ce qui fournirait pour x neuf expressions différentes, tandis que l'équation proposée ne peut avoir que trois racines.

Or il est clair qu'on n'a pas résolu les deux équations

$$yz = -p, \; y^3 + z^3 = -2q,$$

mais bien les deux suivantes

$$y^3z^3 = -p^3, \; y^3 + z^3 = -2q;$$

et comme toute quantité a trois racines cubiques, si l'on représente toujours (211) par α et α^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité, l'équation $y^3z^3 = -p^3$ admettra, pour le produit yz, les trois valeurs $-p$, $-\alpha p$, $-\alpha^2 p$. Donc la formule en x doit donner à la fois les racines des trois équations

$$x^3 + 3px + 2q = 0, \; x^3 + 3\alpha px + 2q = 0, \; x^3 + 3\alpha^2 px + 2q = 0;$$

et l'on distinguera facilement les trois valeurs relatives à chacune d'elles par la considération que la somme $y + z$ doit être telle que le produit yz égale $-p$, ou $-\alpha p$, ou $-\alpha^2 p$.

Ainsi, pour la première des trois équations, la seule qui nous occupe ici, on formera les valeurs de x en n'ajoutant que les valeurs de y et de z donnant un produit réel.

Si donc on représente par A l'une quelconque des trois valeurs du premier radical cubique, et par B l'une des valeurs du second, en observant d'ailleurs que $\alpha^3 = 1$ et $\alpha^4 = \alpha$, on aura pour x les trois seules valeurs

$$x = A + B, \; x = \alpha A + \alpha^2 B, \; x = \alpha^2 A + \alpha B.$$

Si l'on veut discuter ces valeurs, comme on a

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \alpha^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

on les mettra sous la forme

$$x = \text{A}+\text{B}, \quad x = -\frac{\text{A}+\text{B}}{2} + \frac{\text{A}-\text{B}}{2}\sqrt{-3},$$

$$x = -\frac{\text{A}+\text{B}}{2} - \frac{\text{A}-\text{B}}{2}\sqrt{-3}.$$

Il y a trois cas à considérer.

1° Soit $q^2+p^3>0$. Dans ce cas, y et z admettent chacun une détermination réelle, A et B par exemple. Donc A + B et A — B sont aussi réels. Par conséquent, la première racine est réelle, et les deux autres sont imaginaires.

2° Soit $q^2+p^3=0$; alors $\text{A}=\text{B}$. Dans ce cas les trois racines sont $x=2\text{A}$, $x=-\text{A}$, $x=-\text{A}$, et par conséquent toutes réelles, dont deux égales entre elles.

3° Soit $q^2+p^3<0$, et par suite p négatif. Alors y et z n'ont plus de détermination réelle, et les valeurs de x sont compliquées d'imaginaires. Or la proposée doit avoir au moins une racine réelle, et, en outre, si les trois racines sont réelles et inégales, ce ne peut être que dans le cas actuel (389).

On peut encore prouver directement que les trois racines sont réelles. En effet, soient A et B les déterminations de y et de z, telles que $x=\text{A}+\text{B}$ soit la racine réelle a, les deux autres racines seront aussi réelles, si la quantité $\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})\sqrt{-1}$ est réelle.

Or on a $$\frac{\text{A}^3-\text{B}^3}{\text{A}-\text{B}} = \text{A}^2+\text{AB}+\text{B}^2,$$

d'où $$\text{A}-\text{B} = \frac{\text{A}^3-\text{B}^3}{\text{A}^2+\text{AB}+\text{B}^2};$$

mais y^3 ou $\text{A}^3=-q+\sqrt{q^2+p^3}$, et z^3 ou $\text{B}^3=-q-\sqrt{q^2+p^3}$.

Donc $\text{A}^3-\text{B}^3=2\sqrt{q^2+p^3}$. En outre, dans le cas actuel, $\text{A}+\text{B}=a$, et $\text{AB}=-p$; donc

$$\text{A}-\text{B} = \frac{2\sqrt{q^2+p^3}}{a^2+p},$$

et par suite $\frac{1}{2}(A - B)\sqrt{-3} = \frac{\sqrt{-3(q^2 + p^3)}}{a^2 + p}$,

expression réelle, puisque $q^2 + p^3$ est une quantité négative.

Ainsi les trois racines de la proposée sont réelles.

Cependant on ne peut ici débarrasser la formule en x des quantités imaginaires qui s'y trouvent, à moins d'exprimer chaque radical cubique par une suite infinie de termes. Ce cas, où l'Algèbre ne peut réduire la formule à une quantité réelle, quoiqu'elle le soit cependant, a été nommé pour cette raison *cas irréductible* du troisième degré. On divise d'une manière très-simple le premier membre de l'équation proposée par le facteur $x - a$ correspondant à la racine réelle, en remarquant qu'on a la relation $a^3 + 3pa + 2q = 0$, qui, retranchée de la proposée, donne $x^3 - a^3 + 3p(x - a) = 0$;
d'où l'on tire

$$\frac{x^3 - a^3 + 3p(x - a)}{x - a} = x^2 + ax + a^2 + 3p = 0,$$

et par suite

$$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{-3\left(\frac{a^2}{4} + p\right)}.$$

Ce sont les deux autres racines de la proposée.

On peut s'exercer à vérifier qu'elles s'accordent avec les racines fournies par les formules générales.

SECTION IV.

DIVISEURS DU SECOND DEGRÉ. ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS. ÉQUATIONS RÉCIPROQUES ET BINÔMES.

---

§ 1er. *Recherche des diviseurs du second degré.* * *Résolution de l'équation générale du quatrième degré.*

Diviseurs du second degré.

342. Lorsqu'on cherche les diviseurs d'un degré quelconque

d'une équation, on suppose toujours que celle-ci est ramenée à la forme ordinaire $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots\ldots = 0$, et que les diviseurs ont aussi l'unité pour coefficient du premier terme.

La détermination des diviseurs d'un degré supérieur au second offrant peu d'utilité, et dépendant d'ailleurs d'un système d'équations entre autant d'inconnues qu'il y a d'unités dans le degré de ces diviseurs, nous ne nous occuperons que de ceux du second degré.

On a vu (287) que le nombre de ces diviseurs est $\frac{1}{2}m(m-1)$ pour une équation $X=0$ du degré m. Le moyen le plus naturel de les déterminer est de représenter l'un d'eux par x^2+px+q, et de chercher à quelles conditions p et q doivent satisfaire pour que X soit exactement divisible par x^2+px+q. Or si l'on effectue cette division jusqu'à ce qu'on obtienne un reste de la forme $Ax+B$ du premier degré en x, il faudra que ce reste soit nul indépendamment de toute valeur de x, et que par conséquent l'on ait séparément $A=0$, $B=0$.

Si l'on peut résoudre ce système d'équations, les couples de valeurs qu'on en déduira pour p et q donneront tous les diviseurs du second degré de $X=0$. Mais comme l'équation finale, qu'on obtiendra en éliminant p ou q entre les deux équations, sera du degré $\frac{1}{2}m(m-1)$, nombre plus grand que m si m est >3, on voit qu'en général il sera plus difficile de trouver les diviseurs du second degré d'une équation que de la résoudre elle-même.

Au reste, il existera toujours des couples de valeurs réelles de p et de q satisfaisant aux équations $A=0$, $B=0$, puisque le facteur du second degré correspondant à deux racines imaginaires conjuguées est réel (292). En outre, le nombre de ces couples sera au moins égal à $\frac{1}{2}m$ ou $\frac{1}{2}(m+1)$, selon que m sera pair ou impair. Tous ces couples, supposés déterminés, feront connaître tous les diviseurs du second degré de $X=0$, et par suite toutes ses racines imaginaires. S'il y a des couples

commensurables, les diviseurs correspondants le seront aussi, et serviront à ramener la résolution de l'équation $X=0$ à la résolution d'une équation de degré moindre et à celle d'autres équations du second degré.

343. Il est souvent plus commode de chercher les diviseurs du second degré par la méthode dite *des coefficients indéterminés*, qui consiste à représenter par des indéterminées les coefficients du quotient. Ces coefficients, étant au nombre de $m-2$, feront, avec ceux du diviseur, m inconnues, qu'on déterminera d'après la condition que le quotient, multiplié par le diviseur, reproduise identiquement le premier membre de l'équation $X=0$.

344. Appliquons la première méthode à l'équation du troisième degré, qu'on peut toujours ramener à la forme

$$x^3+Qx+R=0.$$

En divisant le premier membre par x^2+px+q, on trouve $(p^2-q+Q)x+pq+R$ pour le reste du premier degré en x, ce qui donne les deux équations

$$p^2-q+Q=0,\ pq+R=0.$$

En éliminant q entre ces deux équations, on a

$$p^3+Qp+R=0$$

qui doit fournir les valeurs de p. Cette équation étant tout à fait semblable à la proposée, la question n'a fait aucun progrès.

Or il est facile de voir qu'il ne pouvait en être autrement. En effet, soient a, b, c les racines de la proposée. Comme elle manque de second terme, il est clair qu'on a

$$a+b+c=0, \text{ d'où } a+b=-c,\ a+c=-b,\ b+c=-a.$$

Comme la somme de deux quelconques des racines doit égaler $-p$, il est clair que les trois valeurs de p sont

$$p=-(a+b)=c,\ p=-(a+c)=b,\ p=-(b+c)=a.$$

Ainsi l'équation finale en p doit avoir les mêmes racines que la proposée.

345. Appliquons maintenant la seconde méthode à l'équation du quatrième degré privée de second terme

$$x^4+Qx^2+Rx+S=0.$$

Si l'on divise le premier membre par x^2+px+q, le quotient sera de la forme x^2+mx+n, et l'on aura

$$(x^2+px+q)(x^2+mx+n)=x^4+Qx^2+Rx+S.$$

Développant le produit, puis égalant entre eux les coefficients des mêmes puissances de x, on obtient les quatre équations

$$p+m=0,\ mp+q+n=Q,\ np+mq=R,\ nq=S.$$

Enfin, éliminant m, n et q entre ces équations, on a l'équation finale du sixième degré

$$p^6+2Qp^4+(Q^2-4S)p^2-R^2=0.$$

Comme elle ne contient que des puissances paires de p, on la ramène au troisième degré en posant $p^2=z$, ce qui donne

$$z^3+2Qz^2+(Q^2-4S)z-R^2=0;$$

et si l'on peut déterminer les valeurs de z, on en déduira pour p six valeurs, deux à deux égales et de signes contraires.

On pouvait aisément prévoir cette réduction de l'équation finale au troisième degré.

En effet, soient a, b, c, d, les racines de la proposée, les six valeurs de p seront

$$-a-b,\ -a-c,\ -a-d,$$
$$-b-c,\ -b-d,\ -c-d.$$

Or $a+b+c+d=0$, d'où $a+b=-(c+d)$, $a+c=-(b+d)$, et $a+d=-(b+c)$. Donc les six valeurs de p doivent être deux à deux égales et de signes contraires, et par conséquent l'équation finale ne peut contenir que des puissances paires de p.

L'équation du troisième degré, à laquelle se réduit l'équation finale du sixième degré, se nomme, pour cette raison, la *réduite*.

**Résolution de l'équation générale du quatrième degré.*

346. Ce qui précède conduit à la résolution de l'équation générale du quatrième degré, qui est, après qu'on a fait disparaître son second terme, de la forme

$$(1)\qquad x^4+Qx^2+Rx+S=0.$$

La réduite étant

$$z^3+2Qz^2+(Q^2-4S)z-R^2=0,$$

si l'on représente par z', z'', z''', ses trois racines, dont on peut toujours obtenir les formules générales (341), on aura pour les six valeurs de p (345),

$$p=\pm\sqrt{z'},\quad p=\pm\sqrt{z''},\quad p=\pm\sqrt{z'''}.$$

Or les valeurs de p, exprimées en fonctions des racines, sont

$$p=\pm(a+b),\ p=\pm(a+c),\ p=\pm(a+d).$$

Donc $a+b=\pm\sqrt{z'}$, $a+c=\pm\sqrt{z''}$, $a+d=\pm\sqrt{z'''}$.

Si l'on fait la somme membre à membre, comme

$$a+b+c+d=0,$$

on a

$$a=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{z'}\pm\sqrt{z''}\pm\sqrt{z'''}).$$

Cette formule doit donner les quatre racines de la proposée, puisque a représente l'une quelconque d'entre elles. Mais si l'on combine trois à trois les signes des radicaux, on trouve pour a huit valeurs différentes. On voit, en effet, qu'il doit en être ainsi; car la réduite, ne renfermant que la seconde puissance du coefficient R de la proposée, s'applique également à l'équation qui résulte du changement de R en $-$R, et doit par conséquent fournir aussi les quatre racines de cette nouvelle équation. Pour exclure ces dernières, il suffit de se rappeler que le coefficient R, pris avec un signe contraire, doit égaler la somme des produits des racines prises trois à trois. Or on peut obtenir cette somme en développant le produit $(a+b)(a+c)(a+d)$, puisque l'ensemble $(a^3+a^2b+a^2c+a^2d)$ des termes excédants est nul, à cause de $a+b+c+d=0$. Par conséquent les signes des radicaux dans l'expression de a doivent toujours être tels que le produit $(a+b)(a+c)(a+d)$ soit d'un signe contraire à celui de R, ce qui réduit les huit combinaisons de la formule ci-dessus aux quatre suivantes :

$$x=\frac{1}{2}(+\sqrt{z'}+\sqrt{z''}-\sqrt{z'''}),$$

$$x=\frac{1}{2}\left(+\sqrt{z'}-\sqrt{z''}+\sqrt{z'''}\right),$$

$$x=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{z'}+\sqrt{z''}+\sqrt{z'''}\right),$$

$$x=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{z'}-\sqrt{z''}-\sqrt{z'''}\right);$$

bien entendu que, dans les applications, on prendra pour $+\sqrt{z'}$, $+\sqrt{z''}$, $+\sqrt{z'''}$, trois déterminations telles que leur produit ait le même signe que R.

347. La réduite a toujours une racine positive, puisque son dernier terme est négatif; et comme, en outre, le produit des trois racines doit être positif (288), les deux autres, si elles sont réelles, ont nécessairement le même signe.

Il ne peut donc se présenter que trois cas.

Ier CAS. *Les trois racines* z, z', z'' *de la réduite réelles et positives.*

Alors la proposée a ses quatre racines réelles. Le produit

$$\left(+\sqrt{z'}\right)\left(+\sqrt{z''}\right)\left(+\sqrt{z'''}\right)$$

étant toujours positif dans ce cas, nos formules générales ne sont immédiatement applicables que si R est positif; s'il était négatif, on aurait à changer le signe de l'un des radicaux.

IIe CAS. *Les trois racines de la réduite réelles, mais l'une* z' *positive, les deux autres* z'', z''' *négatives.*

Dans ce cas, le seul radical $\sqrt{z'}$ est réel, les deux autres $\sqrt{z''}$, $\sqrt{z'''}$ sont imaginaires. Donc les quatre racines de la proposée sont imaginaires, excepté dans l'hypothèse $z''=z'''$. Alors les deux premières formules se réduisent à la quantité réelle $\sqrt{z'}$, les deux autres valeurs de x sont imaginaires; en outre, comme $\sqrt{z''}$ et $\sqrt{z'''}$ sont de la forme $\alpha\sqrt{-1}$, $\beta\sqrt{-1}$, le produit $\left(+\sqrt{z'}\right)\left(+\sqrt{z''}\right)\left(+\sqrt{z'''}\right)$ devient $-\alpha\beta\sqrt{z'}$. Il faudra donc prendre pour $\sqrt{z'}$ la détermination dont le signe est contraire à celui de R.

IIIe CAS. *Une racine* z' *positive, les deux autres* z'', z''' *imaginaires.*

Dans ce cas, on peut diviser la réduite par $z - z'$, ce qui donnera une équation du second degré, dont les racines seront de la forme $z'' = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $z''' = \alpha - \beta\sqrt{-1}$.

Or les racines carrées de ces expressions sont encore (157) des expressions de même forme; on aura donc

$$\sqrt{z''} = \pm(m + n\sqrt{-1}), \quad \sqrt{z'''} = \pm(m - n\sqrt{-1});$$

et si l'on prend pour $+\sqrt{z''}$, $+\sqrt{z'''}$, les expressions conjuguées $\qquad m + n\sqrt{-1}, \; m - n\sqrt{-1},$

on aura $\qquad (+\sqrt{z''})(+\sqrt{z'''}) = m^2 + n^2.$

Comme le produit $(+\sqrt{z'})(+\sqrt{z''})(+\sqrt{z'''})$ doit avoir le même signe que R, il faudra donc choisir pour $+\sqrt{z'}$ la détermination de même signe que R. Ainsi les quatre valeurs de x seront

$$x = -\sqrt{z'} + 2m, \quad x = -\sqrt{z'} - 2m,$$
$$x = +\sqrt{z'} + 2n\sqrt{-1}, \quad x = +\sqrt{z'} - 2n\sqrt{-1},$$

dont les deux premières réelles, et les deux autres imaginaires.

Remarque. Nous avons omis le cas $R = 0$, qui ramène la proposée à une équation trinôme réductible au second degré.

Application. Prenons, pour exemple, l'équation

$$x^4 + 2x^2 - 8x + 5 = 0$$

signalée par Lagrange comme mettant en défaut la règle donnée dans la note 13 de son *Traité de la résolution des équations numériques*. (Voyez, dans l'édition de 1808, la *Correction finale*, p. 313.)

Comparant cette équation à l'équation générale privée de second terme

$$x^4 + Qx^2 + Rx + S = 0,$$

on a

$$Q = +2, \; R = -8, \; S = +5.$$

La réduite est

$$z^3 + 4z^2 - 16z - 64 = 0.$$

Si l'on fait maintenant $z = u - \frac{4}{3}$, on obtient la transformée

privée de second terme

$$u^3 - \frac{64}{3}u - \frac{1024}{27} = 0.$$

Comparant cette équation à l'équation générale privée de second terme (341), $x^3 + 3px + 2q = 0$, dont les racines sont fournies par la formule

$$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2+p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2+p^3}},$$

on a $$3p = -\frac{64}{3}, \quad 2q = -\frac{1024}{27},$$

d'où l'on tire

$$p = -\frac{64}{3^2}, \quad q = -\frac{512}{3^3};$$

substituant ces valeurs dans l'expression générale ci-dessus, on trouve que $q^2 + p^3 = 0$; il vient donc

$$u = 2\sqrt[3]{\frac{512}{3^3}} = \frac{16}{3},$$

et par suite $$z = 4.$$

Divisant alors le premier membre de la réduite par $z - 4$, on trouve que ses deux autres racines doivent être données par l'équation

$$z^2 + 8z + 16 = 0,$$

et sont ainsi toutes deux égales à -4.

On a donc pour les trois racines de la réduite

$$z' = +4, \; z'' = -4, \; z''' = -4.$$

Prenant respectivement pour $+\sqrt{z'}$, $+\sqrt{z''}$, $+\sqrt{z'''}$, les déterminations $+2$, $+2\sqrt{-1}$, $+2\sqrt{-1}$ dont le produit est négatif, aussi bien que R, on a enfin pour les quatre racines de l'équation proposée

$$x = 1, \quad x = 1, \quad x = -1 + 2\sqrt{-1}, \quad x = -1 - 2\sqrt{-1}.$$

§ 2. *Abaissement des équations. Équations réciproques et binômes.*

Abaissement des équations.

348. *Abaisser le degré d'une équation*, c'est ramener sa ré-

solution à celle d'une équation de degré moindre. Par exemple, lorsqu'une équation $X = 0$ a des racines égales, elle peut (314) se partager en plusieurs autres équations de degrés moindres, et par conséquent elle est susceptible d'*abaissement*. On peut encore abaisser le degré d'une équation, quand on connaît quelques relations particulières entre deux ou un plus grand nombre de ses racines.

349. Supposons d'abord que deux racines a et b d'une équation $F(x) = 0$ soient liées entre elles par la relation

$$pa + qb = k,$$

p, q et k étant des quantités connues.

Il est alors facile de déterminer a et b. En effet, puisque a et b sont racines de $F(x) = 0$, on doit avoir $F(a) = 0$ et $F(b) = 0$.

Si l'on prend dans la relation ci-dessus la valeur de b, qui est $\frac{k-pa}{q}$, et qu'on la substitue dans $F(b) = 0$, on a $F\left(\frac{k-pa}{q}\right) = 0$. Cette équation devant subsister en même temps que $F(a) = 0$, il en résulte que les deux équations

$$(1) \qquad F(x) = 0, \quad F\left(\frac{k-px}{q}\right) = 0,$$

doivent être satisfaites par une même valeur $x = a$, et que, par conséquent, les premiers membres ont un commun diviseur D, qui, étant égalé à zéro, doit donner la racine $x = a$.

Mais comme on a $F\left(\frac{k-pa}{q}\right) = 0$, il est clair que la quantité $\frac{k-pa}{q}$ est aussi racine de $F(x) = 0$; si donc on la représente par b, on voit que l'équation $F(x) = 0$ a deux racines $x = a$, $x = b$, qui satisfont à la relation donnée $pa + qb = k$.

La seconde des équations (1), prise isolément, a pour racines toutes les quantités pour lesquelles l'expression $\frac{k-px}{q}$ devient égale à une des racines de la première $F(x) = 0$. Donc les deux équations (1) ont pour racines communes toutes celles de $F(x) = 0$ pour lesquelles $\frac{k-px}{q}$ reproduit une des

racines de $F(x)=0$. Par conséquent toutes ces racines communes seront données par l'équation $D=0$.

Si donc une autre racine c de $F(x)=0$ satisfait à la relation $\frac{k-pc}{q}=c$, elle devra être aussi donnée par l'équation $D=0$.

Il est presque inutile d'ajouter que le degré de $F(x)=0$ pourra être abaissé d'autant d'unités, qu'on aura déterminé de racines de l'équation.

Dans le cas où $p=q$, la relation donnée devient $p(a+b)=k$ ou, pour abréger, $a+b=h$. Alors, les deux racines entrant de la même manière dans cette relation, on doit obtenir le même résultat, soit qu'on élimine a, soit qu'on élimine b. Donc l'équation $D=0$ doit donner les deux racines a et b, et, en outre, toutes celles de $F(x)=0$ qui satisfont à la relation $x+x=h$ ou $x=\frac{h}{2}$.

350. Supposons maintenant que trois racines a, b, c, de l'équation $F(x)=0$ soient liées entre elles par la relation

$$pa+qb+rc=k,$$

p, q, r et k étant des quantités connues, on aura en même temps les quatre équations

$$F(a)=0,\ F(b)=0,\ F(c)=0,\ pa+qb+rc=k.$$

Si l'on élimine b et c entre les trois dernières, l'équation finale en a devra avoir lieu en même temps que la première. Donc ces deux équations auront un commun diviseur D, qui, étant égalé à zéro, donnera la racine a. Par suite on déterminera les racines b et c.

Dans le cas où $p=q=r$, le diviseur D est du troisième degré.

351. Prenons, pour exemple, l'équation

$$x^3-6x^2+3x+10=0$$

où l'on sait qu'une des racines égale le double d'une autre plus l'unité.

Soient a et b deux racines satisfaisant à la relation $b=2a+1$, on a les trois équations

$$a^3-6a^2+3a+10=0,\ b^3-6b^2+3b+10=0,\ b=2a+1.$$

Si l'on substitue dans la seconde la valeur de b donnée par la dernière, il vient, après avoir ordonné,

$$8a^3 - 12a^2 - 12a + 8 = 0,$$

dont le plus grand commun diviseur avec la première est

$$a^2 - a - 2.$$

En l'égalant à zéro, on a l'équation $a^2 - a - 2 = 0$ qui donne

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2},$$

d'où $a = 2$, $a = -1$, et par suite $b = 5$, $b = -1$.

Le premier couple $a = 2$, $b = 5$ fournit en effet deux racines de la proposée, qui satisfont à la relation $b = 2a + 1$. Le second couple $a = -1$, $b = -1$, fournit ici la troisième racine de la proposée, et satisfait d'ailleurs à la relation $b = 2a + 1$, qui, dans le cas actuel, devient simplement $a = 2a + 1$.

352. Il peut se présenter certains cas où le procédé qu'on vient d'indiquer exige des modifications, ou même ne soit plus applicable.

Par exemple, si l'équation $F(x) = 0$, où l'on sait que la somme de deux racines $a + b = h$, n'a que des racines soit toutes égales à $\frac{1}{2}h$, soit les unes égales à $\frac{1}{2}h$, et les autres formant des couples $c + d$, $e + f$..., dont chacun $= h$, il est évident que l'équation $F(h - x) = 0$, déduite de l'équation $F(x) = 0$ au moyen de la relation $a + b = h$, sera identique avec la proposée.

Dans ce cas, il faut d'abord vérifier combien la proposée a de racines égales à $\frac{1}{2}h$, et les supprimer. Supposons qu'alors toutes les racines de l'équation résultante $F(x) = 0$ soient distribuées par couples dont chacun ait h pour valeur, il est évident que si l'on représente par une inconnue auxiliaire z le produit de deux racines d'un couple quelconque, l'équation $f(x) = 0$ pourra se décomposer en facteurs du second degré, tels que $x^2 - hx + z$. Par conséquent, si l'on divise $f(x)$ par $x^2 - hx + z$, le reste du premier degré en x, qui sera de la

forme $Mx + N$, devra être nul indépendamment de toute valeur de x. On aura donc $M = 0$, $N = 0$, et les polynômes M et N, ne renfermant d'autre inconnue que z, auront un commun diviseur D, qui, étant égalé à zéro, déterminera z. Les valeurs de x seront ensuite fournies par l'équation

$$x^2 - hx + z = 0.$$

353. L'inconnue auxiliaire z peut être prise de manière à satisfaire à d'autres conditions. Mais, dans tous les cas, il faut qu'on sache d'avance que toutes ses valeurs seront données par une équation d'un degré inférieur à la proposée. Par exemple, si l'on prend pour z la demi-différence entre deux racines d'un même couple, on a en même temps les trois équations

$$f(a) = 0,\ a + b = h,\ a - b = 2z.$$

Si alors on élimine b entre les deux dernières, on trouve

$$a = z + \frac{1}{2}h,$$

et si l'on élimine a entre celle-ci et la première, on a l'équation finale

$$f\left(z + \frac{1}{2}h\right) = 0.$$

Cette équation sera de même degré que $f(x) = 0$; mais chaque couple de racines devant donner pour z deux valeurs égales et de signes contraires, comme $\frac{1}{2}(a - b)$, $\frac{1}{2}(b - a)$, il en résulte que l'équation finale en z ne contiendra que des puissances paires de z, et pourra par conséquent se ramener à un degré moitié moindre en posant $z^2 = y$.

354. En général, étant données une équation et des relations quelconques entre plusieurs de ses racines, pour abaisser le degré de l'équation, il faut considérer comme une inconnue distincte chacune des racines qui entrent dans les relations données, former les équations résultantes de leur substitution dans l'équation proposée, et y joindre celles qui expriment les relations données. Alors on élimine, entre ces équations,

toutes les inconnues excepté une que l'on conserve dans deux équations; celles-ci admettront donc un commun diviseur, qui, étant égalé à zéro, déterminera une ou plusieurs racines de l'équation proposée, ou les valeurs de l'inconnue auxiliaire qu'on peut avoir été conduit à introduire. Dans ce dernier cas, les relations entre cette inconnue et les racines servent à les déterminer en totalité ou en partie. Enfin on divise le premier membre de l'équation donnée par le produit des facteurs correspondants aux racines trouvées.

Des équations réciproques.

355. Certaines équations indiquent à première vue qu'il existe une relation entre leurs racines, et par suite sont susceptibles d'abaissement. Telles sont les équations dont les racines se reproduisent, mais dans un autre ordre, en divisant successivement l'unité par chacune d'elles, et qu'on appelle pour cette raison (297) *équations réciproques.* D'après cela, une équation réciproque doit rester la même lorsqu'on y remplace x par $\frac{1}{x}$.

Si donc on veut déterminer les relations qui doivent exister entre les coefficients d'une équation pour qu'elle soit réciproque, il suffira de substituer $\frac{1}{x}$ au lieu de x dans cette équation, et (40) d'égaler, dans les deux équations, les coefficients des mêmes puissances de x, d'où l'on déduira les conditions demandées.

Soit l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0.$$

La transformée en $\frac{1}{x}$, étant ramenée à la forme ordinaire, sera

$$x^m + \frac{R}{S}x^{m-1} + \frac{Q}{S}x^{m-2} + \frac{P}{S}x^{m-3} \ldots + \frac{C}{S}x^3 + \frac{B}{S}x^2 + \frac{A}{S}x + 1 = 0.$$

Pour qu'elle soit identique avec la proposée, il faut qu'on ait

$$\frac{R}{S}=A,\ \frac{Q}{S}=B,\ \frac{P}{S}=C,\ldots\frac{C}{S}=P,\ \frac{B}{S}=Q,\ \frac{A}{S}=R,\ \frac{1}{S}=S.$$

Ainsi, pour que l'équation proposée soit réciproque, il faut que toutes ces conditions soient satisfaites, et si elles le sont toutes, l'équation sera réciproque.

Or la dernière égalité donne $S^2=1$, d'où $S=\pm 1$.

1° Si l'on a $S=+1$, on devra donc avoir

$$R=A,\ Q=B,\ P=C\ldots.$$

c'est-à-dire que les coefficients A, B, C,... devront être respectivement égaux aux coefficients R, Q, P,... et de même signe.

2° Si l'on a $S=-1$, on devra donc avoir

$$R=-A,\ Q=-B,\ P=-C\ldots.$$

c'est-à-dire que les coefficients A, B, C,... devront être respectivement égaux aux coefficients R, Q, P,... et de signes contraires.

Mais dans ce second cas, si le degré m de l'équation est un nombre pair, le coefficient L du terme du milieu devra être nul, car il devra satisfaire à l'égalité $L=-L$.

Donc en général, *pour qu'une équation soit réciproque, il faut et il suffit que les coefficients des termes à égale distance des extrêmes soient égaux (chacun à chacun) et de même signe, ou égaux et de signes contraires; mais si, dans ce dernier cas, le degré de l'équation est pair, le terme du milieu devra être nul.*

D'après cela, les équations réciproques se réduisent, selon que le degré est pair ou impair, aux quatre formes suivantes où l'on a pris m numérique pour fixer les idées.

(1) $x^6+Px^5+Qx^4+Rx^3+Qx^2+Px+1=0$,

(2) $x^5+Px^4+Qx^3+Qx^2+Px+1=0$,

(3) $x^5+Px^4+Qx^3-Qx^2-Px-1=0$,

(4) $x^6+Px^5+Qx^4-Qx^2-Px-1=0$.

Nous allons maintenant nous occuper de l'abaissement de ces équations.

356. Nous commencerons par faire voir qu'on peut ramener toutes les équations précédentes à la forme (1).

En effet, il est facile de vérifier que toutes celles de degré impair admettent l'une des racines $+1$ ou -1, et que celles de degré pair de la forme (4) admettent à la fois les deux racines $+1$ et -1.

Car 1° si dans l'équation (2) on rapproche les termes à égale distance des extrêmes, on peut l'écrire

$$(x^5+1)+Px(x^3+1)+Qx^2(x+1)=0,$$

où le premier membre est évidemment divisible par le facteur $x+1$ qui donne la racine $x=-1$; or si l'on effectue la division de chacun des binômes (x^5+1),..... par $x+1$, on trouve l'équation suivante, qui est réciproque de la forme (1),

$$\left.\begin{array}{r} x^4-1 \\ +P \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x^3+1 \\ -P \\ +Q \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x^2-1 \\ +P \end{array}\right| x+1=0.$$

2° De même l'équation (3) peut s'écrire

$$(x^5-1)+Px(x^3-1)+Qx^2(x-1)=0,$$

dont le premier membre est divisible par le facteur $x-1$ qui donne la racine $x=1$; en effectuant la division, on trouve l'équation suivante encore réciproque de la forme (1)

$$\left.\begin{array}{r} x^4+1 \\ +P \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x^3+1 \\ +P \\ +Q \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x^2+1 \\ +P \end{array}\right| x+1=0.$$

3° Enfin l'équation (4) peut s'écrire

$$(x^6-1)+Px(x^4-1)+Qx^2(x^2-1)=0.$$

Elle admet le facteur x^2-1 qui donne les racines $x=+1$ et $x=-1$; en effectuant la division par x^2-1, on trouve l'équation suivante, également réciproque de la forme (1),

$$x^4+Px^3+(1+Q)x^2+Px+1=0.$$

Ce qui précède pouvant s'appliquer à des équations réciproques d'un degré quelconque, il en résulte que toutes sont susceptibles d'être ramenées à la forme (1), qui est ainsi leur forme carac-

téristique. C'est pourquoi nous nous bornerons à montrer comment on abaisse les équations de cette forme.

357. *Toute équation réciproque, à coefficients positifs et d'un degré pair, peut se ramener à une équation de degré moitié moindre.*

Soit l'équation

$$x^{2n}+Px^{2n-1}+Qx^{2n-2}+\ldots+Qx^2+Px+1=0.$$

Puisqu'elle est réciproque, elle aura n racines $a, b, c, \ldots$ et n racines $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots$ Donc l'équation, décomposée en facteurs, sera de la forme

$$(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-b)\left(x-\frac{1}{b}\right)(x-c)\left(x-\frac{1}{c}\right)\ldots=0,$$

ou bien, en combinant les facteurs deux à deux,

$$\left[x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1\right]\left[x^2-\left(b+\frac{1}{b}\right)x+1\right]\left[x^2-\left(c+\frac{1}{c}\right)x+1\right]\ldots=0;$$

or, si l'on fait $x+\frac{1}{x}=z$, d'où $x^2+1=xz$, on a

$$\left[xz-\left(a+\frac{1}{a}\right)x\right]\left[xz-\left(b+\frac{1}{b}\right)x\right]\left[xz-\left(c+\frac{1}{c}\right)x\right]\ldots=0;$$

et en divisant chaque facteur par x ou l'équation par x^n, il vient enfin

$$\left[z-\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]\left[z-\left(b+\frac{1}{b}\right)\right]\left[z-\left(c+\frac{1}{c}\right)\right]\ldots=0.$$

Le nombre des facteurs en z étant n, l'équation est évidemment d'un degré moitié moindre que la proposée, et a pour racines tous les couples $a+\frac{1}{a}$, $b+\frac{1}{b}$, $c+\frac{1}{c}, \ldots$

Voyons maintenant comment on peut déduire l'équation en z de l'équation donnée. Si l'on divise celle-ci par x^n, et qu'on rapproche deux à deux les termes à coefficients égaux, il vient

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+P\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+Q\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\ldots=0.$$

Il reste à substituer aux binômes en x leur valeur en z.

Or on a en général

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)+\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right);$$

d'où l'on tire, en mettant z au lieu de $x+\frac{1}{x}$,

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)z-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

En faisant successivement $n=1, n=2, n=3, n=4\ldots$, et ajoutant la valeur de $x+\frac{1}{x}$, on a

$$x+\frac{1}{x}=z,\quad x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2,\quad x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=z^4-4z^2+2,\quad x^5+\frac{1}{x^5}=z^5-5z^3+5z,\ \text{etc.}$$

En effectuant ces substitutions, on obtiendra l'équation en z, et quand on aura trouvé ses n racines, on en déduira celles de la proposée au moyen de la relation $x+\frac{1}{x}=z$, qui revient à

$$x^2-zx+1=0,$$

d'où

$$x=\frac{1}{2}z\pm\sqrt{\frac{1}{4}z^2-1}.$$

On voit que les deux valeurs de x correspondantes à chaque valeur de z auront un produit égal à l'unité.

Des équations binômes.

358. On donne le nom d'équations *binômes* à toutes celles qui peuvent se ramener à la forme

$$x^m-A=0,$$

A étant une quantité connue quelconque.

Ayant déjà traité cette équation en parlant des valeurs multiples des radicaux algébriques (213), nous nous bornerons au résumé suivant :

Quelle que soit la quantité A, l'équation $x^m-A=0$ a m racines et ne peut en avoir davantage (284). En outre, ces m

racines sont inégales, puisque le binôme $x^m - A$ et son dérivé mx^{m-1} n'ont aucun facteur commun. Or chacune de ces racines, élevée à la puissance m^e, doit reproduire A. Donc les m racines sont comprises dans le radical $\sqrt[m]{A}$, qui a par conséquent m valeurs différentes et n'en a pas davantage. Ainsi se trouve démontrée la proposition admise au nº 210.

Si l'on pose $x = ay$, a étant une des valeurs du radical $\sqrt[m]{A}$, l'équation $x^m - A = 0$ devient $a^m y^m - a^m = 0$, et en divisant par a^m, on a

$$y^m - 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad y = \sqrt[m]{1}.$$

Donc on obtient les m racines de l'équation en x, ou les m valeurs de $\sqrt[m]{A}$, en multipliant l'une d'elles par les m racines de l'équation en y ou les m valeurs de $\sqrt[m]{1}$.

Supposons la quantité A réelle, et pour comprendre à la fois tous les cas, prenons l'équation $x^m \mp A = 0$.

Soit $x = ay$, a étant la valeur arithmétique de $\sqrt[m]{A}$, on aura

$$y^m \mp 1 = 0.$$

Si m est un nombre impair $2n + 1$, l'équation $y^{2n+1} - 1 = 0$ n'aura (213, 1°) que la seule racine réelle $y = 1$, et les racines imaginaires seront données par l'équation réciproque

$$y^{2n} + y^{2n-1} \ldots + 1 = 0,$$

qu'on sait ramener au degré n moitié moindre.

L'équation $y^{2n+1} + 1 = 0$ pourrait se traiter de la même manière, mais il est plus simple de changer y en $-y$, ce qui ramène à l'équation $y^{2n+1} - 1 = 0$, dont les racines, prises avec un signe contraire, sont celles de $y^{2n+1} + 1 = 0$.

Si m est le nombre pair $2n$, l'équation $y^{2n} - 1 = 0$ n'a (213, 2°) que les deux racines réelles $y = +1$, $y = -1$. On pourrait trouver toutes les racines imaginaires en divisant l'équation $y^{2n} - 1 = 0$ par $y^2 - 1$, ce qui donnerait une équation réciproque du degré $2n - 2$. Mais il vaut mieux décomposer l'équation $y^{2n} - 1 = 0$ en $(y^n - 1)(y^n + 1) = 0$, dont les ra-

cines seront fournies par la résolution des deux équations

$$y^n - 1 = 0, \quad y^n + 1 = 0.$$

Quant à l'équation $y^{2n} + 1 = 0$, dont toutes les racines sont imaginaires, on l'abaisse au degré n en posant $y^n = z$, ce qui donne $z^n + 1 = 0$.

Nous terminerons par indiquer, comme exercice de calcul, les racines des équations $y^m - 1 = 0$, $y^m + 1 = 0$, jusqu'à $m = 6$.

Équations.	Racines.
$y^2 - 1 = 0 \ldots$	$y = \pm 1,$
$y^2 + 1 = 0 \ldots$	$y = \pm \sqrt{-1}.$
$y^3 - 1 = 0 \ldots$	$y = 1$; $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2},$
$y^3 + 1 = 0 \ldots$	$y = -1$; $y = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$
$y^4 - 1 = 0 \ldots$	$y = \pm 1$; $y = \pm \sqrt{-1},$
$y^4 + 1 = 0 \ldots$	$y = \frac{1}{2}(\sqrt{2} \pm \sqrt{-2})$; $y = \frac{1}{2}(-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}).$
$y^5 - 1 = 0 \ldots$	$y = 1$; $y = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4} \pm \dfrac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1};$ $y = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{4} \pm \dfrac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1};$
$y^5 + 1 = 0 \ldots$	a pour racines celles de $y^5 - 1 = 0$ prises avec un signe contraire.
$y^6 - 1 = 0 \ldots$	se décompose en $(y^3 - 1)(y^3 + 1) = 0,$
$y^6 + 1 = 0 \ldots$	$y = \pm \sqrt{-1}$; $y = \dfrac{\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2}$; $y = \dfrac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2}.$

Remarque. On ne peut, à l'aide de ces procédés, avoir exactement les racines de l'équation $y^m \mp 1 = 0$ que dans le cas où m est au plus de la forme $3.5.2^k$. Mais on les obtient également dans tous les autres cas à l'aide des lignes trigonométriques. C'est ainsi qu'Ampère enseignait à l'École Polytechnique la résolution des équations binômes dans son cours d'analyse, que je m'estime heureux d'avoir suivi et rédigé en 1814.

CHAPITRE VIII.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

SECTION PREMIÈRE.

RACINES COMMENSURABLES.

§ 1er. *Recherche des limites des racines.*

359. Nous avons dit (276) qu'à défaut de méthodes pour résoudre l'équation générale de chaque degré, on s'est efforcé de perfectionner les procédés propres à déterminer les racines des équations numériques. Comme ces procédés consistent, pour les racines réelles, dont nous nous occuperons d'abord, en une suite de tâtonnements bien coordonnés, la première chose à faire, pour restreindre les essais, est de déterminer les limites des racines réelles de l'équation donnée, c'est-à-dire, deux nombres qui comprennent entre eux toutes les racines positives, et deux nombres qui comprennent entre eux toutes les racines négatives. Nous verrons bientôt (364,365) que la limite supérieure des racines positives étant trouvée, il est facile d'en déduire la limite supérieure des racines négatives,

ainsi que les limites inférieures des unes et des autres; c'est pourquoi nous chercherons d'abord la première limite.

Recherche de la limite supérieure des racines positives.

360. Soit l'équation $X = 0$ dont on peut toujours supposer le premier terme positif. On a vu (278) comment on peut toujours trouver pour l'inconnue x une valeur numérique l, à partir de laquelle toutes les valeurs plus grandes rendent le polynôme X de même signe que son premier terme, et de plus en plus grand. Ce nombre l est évidemment une limite supérieure des racines positives; car aucune valeur de x, à partir de $x = l$, ne pourra rendre X égal à zéro.

Lorsque, le premier terme de l'équation étant positif, les autres ne sont pas tous négatifs, on obtient une limite plus rapprochée en déterminant par le même procédé une valeur numérique de x rendant le premier terme plus grand que la somme des termes négatifs.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 6x - 100 = 0.$$

On posera les inégalités $\frac{x^4}{2} > 8x^2$, $\frac{x^4}{2} > 100$; la première donne $x > \sqrt{16}$ ou 4; la seconde donne $x > \sqrt[4]{200}$ ou 6. On peut donc prendre 6 pour limite supérieure des racines positives.

On peut encore déterminer, sans calcul et à la seule inspection de l'équation, une autre limite, quelquefois inférieure à celle que fournit le moyen indiqué.

Soit x^m le premier terme de l'équation $X = 0$, et N la valeur absolue de son plus grand coefficient négatif. Le cas le plus défavorable serait celui où l'équation aurait tous ses coefficients égaux à $-N$, excepté celui de x^m. Si donc on assigne à x une valeur $x = l$, à partir de laquelle toutes les valeurs plus grandes satisfassent à l'inégalité

$$x^m > Nx^{m-1} + Nx^{m-2} \ldots + Nx + N,$$

à plus forte raison, ces valeurs rendront-elles x^m plus grand

que la somme de tous les termes négatifs et par conséquent X positif.

Or l'inégalité précédente peut s'écrire sous les formes successives

$$x^m > N(x^{m-1} + x^{m-2} \ldots + x + 1),$$

$$x^m > \frac{N(x^m - 1)}{x - 1},$$

$$x^m - \frac{N(x^m - 1)}{x - 1} > 0,$$

ou enfin
$$\frac{x^m(x - 1 - N) + N}{x - 1} > 0;$$

cette dernière inégalité est évidemment satisfaite, si l'on prend $x = N + 1$ ou $x > N + 1$.

Donc, *dans toute équation, on obtient une limite supérieure des racines positives, en ajoutant l'unité à la valeur absolue du plus grand coefficient négatif.*

En appliquant cette règle à l'exemple ci-dessus, on trouve $1 + 100$, limite bien plus forte que la première.

361. Quand le premier terme négatif se trouve au delà du second terme de l'équation, on peut obtenir une limite moindre que la précédente.

En effet, soit $-Rx^{m-n}$ le premier terme négatif, et N le plus grand coefficient négatif; toute valeur de x, qui vérifiera l'inégalité

$$x^m > Nx^{m-n} + Nx^{m-n-1} \ldots + Nx + N,$$

à plus forte raison rendra x^m plus grand que la somme de tous les termes négatifs de l'équation. En opérant comme tout à l'heure, on verra que l'inégalité ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{x^{m-n+1}[x^{n-1}(x - 1) - N] + N}{x - 1} > 0,$$

qui sera satisfaite, si l'on prend $x > 1$ et tel qu'on ait

$$x^{n-1}(x - 1) > N,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(x - 1)^{n-1}(x - 1) > N,$$

ou enfin
$$(x - 1)^n > N,$$

d'où $x = 1 + \sqrt[n]{N}$, ou $x > 1 + \sqrt[n]{N}$.

Donc, *on obtient encore une limite supérieure des racines positives, en ajoutant l'unité au nombre qu'on trouve en extrayant du plus grand coefficient négatif la racine d'un indice égal à la différence entre le degré de l'équation et le degré du premier terme négatif.*

En appliquant cette règle à l'exemple ci-dessus, on trouve $1 + 10$ pour limite.

Remarque. On doit observer que, 1° si le premier coefficient négatif est celui du second terme de l'équation, cette limite coïncide avec la limite $L + N$ donnée par la première règle; 2° si le coefficient négatif N est < 1, abstraction faite du signe, la limite $1 + N$ est préférable à celle que fournit la seconde règle.

362. Le procédé suivant, dû à Newton, donne presque toujours une limite bien inférieure à celles qu'on obtient par les règles précédentes. Il consiste à transformer l'équation en une autre dont les racines soient celles de la proposée diminuées d'une quantité l, qu'on détermine de manière que la transformée ne puisse avoir de racines positives, c'est-à-dire ait tous ses termes positifs. Cette valeur de l sera la limite des racines positives de la proposée, puisqu'en les diminuant de l, on les rendrait toutes négatives.

Soit l'équation $X = 0$; posant $x = l + y$, la transformée pourra se mettre sous la forme

$$L + L'y + \frac{1}{2}L''y^2 + \frac{1}{2.3}L'''y^3 \ldots + y^m = 0,$$

en représentant par $L, L', L'', \ldots$ les résultats de la substitution $x = l$ dans X et dans ses dérivées successives $X', X'', \ldots$; alors il faudra déterminer l de manière que toutes les quantités $L, L', L'' \ldots$, soient positives. Or on y parviendra par une suite de tâtonnements effectués en ne donnant à x que des valeurs entières, pour plus de facilité, et en commençant par déterminer celle qui rend positive la dérivée X_{m-1} du premier degré en x; ensuite on l'augmentera successivement, s'il est néces-

saire, jusqu'à ce qu'on rende positifs X_{m-2}, X_{m-3},.... X' et enfin X.

Prenons l'équation

$$x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 6x - 100 = 0,$$

qui nous a déjà servi d'exemple.

On a
$$X = x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 6x - 100,$$
$$X' = 4x^3 + 15x^2 - 16x + 6,$$
$$\frac{X''}{2} = 6x^2 + 15x - 8,$$
$$\frac{X'''}{2.3} = 2x + \frac{5}{2}.$$

On voit immédiatement que $x=1$ rend les trois derniers polynômes positifs, et qu'il suffit de prendre $x=3$ pour que X le soit également. Cette limite 3 est bien préférable à celles qu'on a trouvées plus haut (360, 361).

363. On obtient souvent une limite rapprochée par une simple décomposition de l'équation. Ce procédé consiste à partager le premier membre en plusieurs parties, dont l'une peut ne contenir que des termes positifs, et dont les autres sont les produits d'un monôme par un facteur binôme ayant une puissance de x pour premier terme, et pour second terme un nombre affecté du signe $-$. S'il y a plus de termes négatifs que de positifs, on peut décomposer l'un de ceux-ci en plusieurs termes, pour n'avoir que des binômes à considérer.

Prenons toujours l'équation ci-dessus. Parmi les différentes manières de la décomposer, choisissons la suivante :

$$(x^4 - 8x^2) + (5x^3 - 100) + 6x = 0,$$

ou

$$x^2(x^2 - 8) + 5(x^3 - 20) + 6x = 0.$$

Il est clair que toute valeur l de x, telle qu'on ait $x^2 > 8$ et $x^3 > 20$, rendra positives toutes les parties qui composent le premier membre, et il en sera de même pour toute valeur de x plus grande que l. Or l'inégalité $x^3 > 20$ ou $x > \sqrt[3]{20}$ est satisfaite par $x = 3$, qui vérifie également l'inégalité $x^2 > 8$. Donc $l = 3$ est la limite supérieure des racines positives.

Cette limite, bien inférieure à celles qu'on a trouvées plus

haut (360, 361), est précisément égale à celle que fournit le procédé de Newton; et, en général, une décomposition bien entendue donnera une limite très-peu supérieure à celle que procure ce dernier procédé nécessitant bien plus de calculs.

Recherche de la limite inférieure des racines positives.

364. Si maintenant on veut déterminer la limite inférieure des racines positives, on fait $x = \frac{1}{y}$ dans l'équation proposée; on obtient alors une transformée en y, dont la plus grande racine correspond à la plus petite racine de la proposée, et réciproquement. Donc en représentant par l la limite supérieure des racines positives de la transformée, $\frac{1}{l}$ sera une limite inférieure des racines positives de la proposée.

On peut aussi trouver directement une limite inférieure au moyen des coefficients de l'équation proposée.

Car soit l'équation

$$(1) \qquad x^m \ldots + Px^{m-n} \ldots - Nx^{m-r} \ldots \pm U = 0,$$

où P représente le plus grand coefficient positif, et N le plus grand coefficient négatif; en posant $x = \frac{1}{y}$, on aura la trans formée

$$\frac{1}{y^m} \ldots\ldots + \frac{P}{y^{m-n}} \ldots\ldots - \frac{N}{y^{m-r}} \ldots\ldots \pm U = 0,$$

ou bien

$$y^m \ldots\ldots - \frac{N}{\pm U} y^r \ldots\ldots + \frac{P}{\pm U} y^n \ldots\ldots \pm \frac{1}{U} = 0.$$

Or, suivant que le dernier terme U de la proposée sera positif ou négatif, $\frac{-N}{\pm U}$ ou $\frac{+P}{\pm U}$ sera le plus grand coefficient négatif de la transformée. Donc on pourra (360) prendre, dans le premier cas, $l = 1 + \frac{N}{U}$, et, dans le second, $l = 1 + \frac{P}{U}$, d'où

$$\frac{1}{l} = \frac{U}{1+N} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{l} = \frac{U}{1+P}.$$

Par conséquent, *on obtient une limite inférieure des racines positives d'une équation, en divisant le dernier terme par la somme faite de ce dernier terme et du plus grand coefficient de signe contraire à ce terme.*

Mais en général, cette limite inférieure sera plus faible que la quantité $\frac{1}{l}$ fournie par la première méthode, si l'on a pris pour l la limite la plus rapprochée possible.

365. Les limites des racines négatives s'obtiennent évidemment d'après les mêmes règles, en changeant x en $-x$ dans l'équation proposée, ce qui change le signe de ses racines.

§ 2. *Recherche des racines commensurables.*

366. Nous venons de voir comment on assigne les limites des racines réelles d'une équation. Ces racines peuvent être commensurables ou incommensurables. On trouve les premières, dont nous nous occuperons d'abord, à l'aide de procédés fort simples, que nous allons exposer.

Commençons par chercher les racines commensurables entières. A cet effet, si l'équation contient des dénominateurs, on les fera disparaître; alors tous les coefficients seront entiers, celui du premier terme pouvant être autre que l'unité.

Prenons, pour plus de simplicité, l'équation du quatrième degré

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

Soit a une de ses racines entières, on aura

$$Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0,$$

d'où, en transposant et divisant par a,

$$\frac{E}{a} = -Aa^3 - Ba^2 - Ca - D.$$

Le second membre étant un nombre entier, il faut que a soit un diviseur exact de E. D'où il résulte qu'on pourrait trouver toutes les racines entières de la proposée, en essayant successivement, soit avec le signe $+$, soit avec le signe $-$, tous les diviseurs du dernier terme, après avoir, bien entendu, déter-

miné les limites des racines positives et négatives de l'équation, pour diminuer le nombre des essais. Voyons si l'on peut les restreindre encore davantage.

Posons $\frac{E}{a}=E'$, transposons D dans le premier membre, et divisons par a; il vient alors

$$\frac{E'+D}{a}=-Aa^2-Ba-C,$$

d'où il suit que a doit être un diviseur exact de $E'+D$.

Posons $\frac{E'+D}{a}=D'$; en opérant comme ci-dessus on trouve

$$\frac{D'+C}{a}=-Aa-B,$$

d'où il suit que a doit être un diviseur exact de $D'+C$.

Posons de même $\frac{D'+C}{a}=C'$, il vient enfin

$$\frac{C'+B}{a}=-A.$$

Lorsqu'une seule des conditions précédentes n'est pas remplie, le nombre a n'est point racine; mais il le devient nécessairement dès qu'elles sont toutes satisfaites. Car, en éliminant les quantités E', D', C' entre les relations qui donnent leurs valeurs, on trouve l'égalité

$$Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E=0.$$

Donc, *pour qu'un nombre entier* a *soit racine d'une équation de degré* m *à coefficients entiers* (dont le premier peut être autre que 1), *il faut et il suffit que* a *divise exactement* 1° *le dernier terme;* 2° *la somme qu'on obtient en ajoutant le coefficient du terme en* x *au quotient du dernier terme divisé par* a*;* 3° *la somme du quotient précédent et du coefficient de* x^2*; ainsi de suite, jusqu'à la somme du coefficient de* x^{m-1} *et du quotient précédent, laquelle somme, divisée par* a, *doit donner un quotient égal, et de signe contraire, au coefficient du premier terme.*

Remarque. Si l'équation manque de quelques termes, on la suppose complète, et l'on considère les coefficients des termes

manquants comme égaux à zéro. Dans ce cas, les quotients, auxquels il faudrait ajouter les coefficients qui sont nuls, doivent être soumis immédiatement à de nouvelles divisions, comme on peut le voir dans le second des exemples suivants.

367. Pour faire les calculs avec plus d'ordre, on les dispose comme il suit, en ayant soin d'essayer d'abord les diviseurs + 1 et — 1, ce qui est plus simple que de les mettre dans le tableau des opérations.

Exemple I. Soit l'équation

$$x^3 + 5x^2 - 44x + 60 = 0.$$

Le procédé de Newton donnant + 4 pour limite supérieure des racines positives, et — 11 pour celle des racines négatives, il est inutile d'essayer tous les diviseurs positifs de 60 qui ne sont pas moindres que 4, et tous les diviseurs négatifs qui ne sont pas moindres que 11. Par conséquent, après avoir reconnu que + 1 et — 1 ne sont pas racines, on formera le tableau suivant :

Diviseurs	+ 3,	+ 2,	— 2,	— 3,	— 4,	— 5,	— 6,	—10,
Quotients	+20,	+30,	—30,	—20,	—15,	—12,	—10,	— 6,
Sommes	—24,	—14,	—74,	—64,	—59,	—56,	—54,	—50,
Quotients	— 8,	— 7,	+37,	»	»	»	+ 9,	+ 5,
Sommes	— 3,	— 2,	+42,				+14,	+10,
Quotients	— 1,	— 1,	»				»	— 1.

On écrit d'abord sur une même ligne, par ordre de grandeur, et tant avec le signe + qu'avec le signe —, tous les diviseurs du dernier terme + 60, compris entre les limites + 4 et — 11.

On place au-dessous, dans une autre ligne, les quotients du dernier terme + 60 par chacun des diviseurs.

On forme la troisième ligne en ajoutant à chacun des quotients précédents le coefficient — 44 du terme en x.

On obtient la quatrième ligne en divisant chacune des sommes précédentes par le diviseur correspondant de la première ligne. La division de — 64 par — 3, de — 59 par — 4, et de — 56 par — 5 ne s'effectuant pas exactement, il s'ensuit que — 3, — 4 et — 5 ne peuvent être racines de l'équation.

On forme la cinquième ligne en ajoutant à chacun des quotients précédents le coefficient $+5$ du terme en x^2.

Enfin on obtient la dernière ligne en divisant les sommes précédentes par les diviseurs correspondants, et les trois quotients trouvés égalant le coefficient du premier terme de l'équation pris avec un signe contraire, on en conclut que les diviseurs correspondants $+3$, $+2$ et -10, sont racines de l'équation qui, n'étant que du troisième degré, ne peut d'ailleurs en avoir d'autres. En effet, l'équation proposée équivaut à

$$(x-3)(x-2)(x+10)=0.$$

Le grand nombre des diviseurs de 60 montre combien il a été utile de déterminer d'abord les limites des racines, car autrement il eût fallu essayer tous les diviseurs

$$+60,\ +30,\ +20,\ +15,\ +12,\ +10,\ +6,\ +5,\ +4,\ +3,\ +2,$$

et les mêmes diviseurs pris avec le signe $-$, ce qui eût donné vingt-deux colonnes d'opérations, au lieu des huit ci-dessus.

Exemple II. Soit l'équation manquant de second terme

$$x^3-19x+30=0.$$

Le procédé de Newton donnant $+4$ et -6 pour limites supérieures des racines positives et négatives, on n'essayera que les diviseurs de 30 compris entre ces limites, et après avoir reconnu que $+1$ et -1 ne sont pas racines, on disposera l'opération comme il suit :

Diviseurs	$+3$,	$+2$,	-2,	-3,	-5,
Quotients	$+10$,	$+15$,	-15,	-10,	-6,
Sommes	-9,	-4,	-34,	-29,	-25,
Quotients	-3,	-2,	$+17$,	»	$+5$,
Quotients	-1,	-1,	»		-1.

Les trois racines de l'équation sont donc $+3$, $+2$, -5.

368. Passons maintenant à la recherche des racines commensurables fractionnaires. On a vu (304) que si une équation, dont tous les coefficients sont entiers et dont celui du premier terme est l'unité, a des racines commensurables, ces racines sont nécessairement entières. On pourra donc trouver les racines commensurables fractionnaires d'une équation, en la

transformant en une autre satisfaisant à ces conditions, et qu'on obtient (299) en posant $x=\frac{y}{h}$, h étant le plus petit commun dénominateur des coefficients fractionnaires. Alors, si l'on cherche les racines commensurables entières de la transformée, en les divisant par h, on aura les racines commensurables fractionnaires de la proposée.

Pour simplifier le calcul, si le coefficient du premier terme de la proposée n'est pas l'unité, il vaut mieux chercher d'abord toutes les racines commensurables entières, et diviser le premier membre par le produit des facteurs simples correspondants à ces racines. Le quotient, étant égalé à zéro, fournit une nouvelle équation dont toutes les racines commensurables sont fractionnaires, et à laquelle on applique le procédé indiqué.

EXEMPLE III. Soit l'équation

$$2x^4+x^3-10x^2-2x+12=0.$$

La méthode des coefficients donne $+4$ pour limite supérieure des racines positives. Pour avoir celle des racines négatives, on change x en $-x$, d'où résulte l'équation

$$2x^4-x^3-10x^2+2x+12=0,$$

qu'on peut écrire

$$(x^4-10x^2)+(x^4-x^3)+2x+12=0,$$

ou $$x^2(x^2-10)+x^3(x-1)+2x+12=0.$$

Le premier membre ayant une valeur positive pour $x=4$ et pour toute valeur de x plus grande que 4, on en conclut que -4 est une limite supérieure des racines négatives de la proposée. On n'essayera donc que les diviseurs de 12 compris entre $+4$ et -4. Après avoir reconnu que $+1$ et -1 ne sont point racines, on trouve que la proposée n'a qu'une racine commensurable entière qui est égale à -2.

Divisant le premier membre par $x+2$, on a le quotient

$$2x^3-3x^2-4x+6$$

qui, étant égalé à zéro, donnera les trois autres racines de la proposée.

Il s'agit de résoudre l'équation

$$2x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0,$$

ou

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 3 = 0.$$

Posant $x = \frac{y}{2}$, on a

$$\frac{y^3}{8} - \frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{4} - 2\frac{y}{2} + 3 = 0,$$

ou

$$y^3 - 3y^2 - 8y + 24 = 0.$$

Le procédé de Newton donne $+6$ pour limite supérieure des racines positives. Pour avoir celle des racines négatives, on change y en $-y$, ce qui donne la transformée

$$y^3 + 3y^2 - 8y - 24 = 0,$$

laquelle peut s'écrire

$$(y^2 - 24) + 3y\left(y - \frac{8}{3}\right) = 0.$$

Sous cette forme on reconnaît facilement que $+3$ est une limite supérieure des racines positives, et que par conséquent -3 en est une des racines négatives de l'équation primitive. On n'essayera donc que les diviseurs de 24 compris entre $+6$ et -3, et l'on reconnaîtra que l'équation n'a qu'une seule racine commensurable entière qui est $+3$. Donc la proposée n'a qu'une seule racine commensurable fractionnaire, qui est $+\frac{3}{2}$.

Divisant le premier membre par

$$(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \text{ou} \quad (x+2)(2x-3)$$

on trouve pour quotient $x^2 - 2$, qui, étant égalé à zéro, donne les deux autres racines incommensurables $x = \pm\sqrt{2}$.

Ainsi l'équation proposée a les quatre racines

$$-2, \quad +\frac{3}{2}, \quad +\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2}.$$

Remarque. Lorsque les coefficients de l'équation proposée sont peu considérables, il vaut mieux la transformer immédiatement en une autre dont le coefficient du premier terme

soit l'unité, les autres coefficients restant toujours entiers.

369. Les procédés qu'on vient d'indiquer ne faisant pas connaître combien de fois les racines qu'ils déterminent peuvent entrer dans l'équation, il faut le rechercher ultérieurement.

A cet effet, on divise l'équation par le produit des facteurs correspondants aux racines déjà trouvées, et l'on soumet l'équation résultante aux mêmes procédés que la proposée, en ayant soin d'essayer seulement ceux des diviseurs du dernier terme qui ont donné les premières racines. Divisant de même la seconde équation par le produit des facteurs correspondants à ces nouvelles racines, on obtient une troisième équation, qu'on traitera de la même manière; ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à une dernière équation n'ayant plus de racines commensurables.

On peut encore substituer successivement à x, dans la première équation résultante trouvée comme ci-dessus, chacune des premières racines obtenues, pour voir s'il s'en trouve qui satisfasse à cette équation; et ainsi de suite.

Enfin on a vu (316, rem.) que si une équation $X=0$ a plusieurs racines égales à $x=a$, l'ordre de la dérivée de X, qui ne se réduit pas à zéro pour $x=a$, indique le degré de multiplicité de la racine a.

Il suffira donc de voir combien d'équations

$$X=0,\ X'=0,\ X''=0\ldots\ldots$$

sont vérifiées par $x=a$, pour connaître le nombre de fois que a est racine de la proposée.

370. Nous terminerons par indiquer un procédé dû à Newton, qui souvent réduit beaucoup le nombre des diviseurs à essayer. Il est fondé sur le principe suivant:

Théorème. *Si dans une équation à coefficients entiers ayant pour racine un nombre entier* a, *on remplace* x *par un nombre quelconque* n, *positif ou négatif, le résultat de la substitution sera divisible par* a — n.

Car soit l'équation $F(x)=0$; a étant racine, on aura

$$\frac{F(x)}{x-a}=f(x),$$

qui sera une autre fonction de x à coefficients entiers. Faisant dans cette égalité $x=n$, il vient

$$\frac{F(n)}{n-a}=f(n) \quad \text{ou bien} \quad \frac{F(n)}{a-n}=-f(n),$$

qui sera nécessairement un nombre entier.

Cette proposition étant vraie, quel que soit l'entier n, on peut faire simplement $n=+1$ et $n=-1$. Alors on voit par ce qui précède que $F(1)$ doit être divisible par $a-1$, et $F(-1)$ par $a+1$. D'où il résulte que

Tout diviseur du dernier terme, qui, diminué ou augmenté de l'unité, ne divise pas exactement le résultat de la substitution de $+1$ et de -1 dans le premier membre de l'équation, ne peut être racine et doit être rejeté.

Soit l'équation

$$4x^3+5x^2+3x-1062=0;$$

la limite supérieure des racines positives étant $+12$, et celle des racines négatives -6, les diviseurs de 1062 se trouvent d'abord réduits aux suivants :

$$+9,\ +6,\ +3,\ +2,\ -2,\ -3.$$

Or, en faisant $x=+1$ et $x=-1$ dans le premier membre, on a 1050 et 1064, abstraction faite du signe; il faut donc chercher quels sont ceux des diviseurs ci-dessus qui, augmentés de 1, divisent 1064, et qui, diminués de 1, divisent 1050. On trouve que les diviseurs $+6$, $+3$ et -2 sont les seuls qui satisfassent à cette double condition, et en les essayant d'après le procédé indiqué (367), on reconnaît que le seul diviseur $+6$ est racine de l'équation; les deux autres racines sont incommensurables.

SECTION II.

SÉPARATION DES RACINES INCOMMENSURABLES.

---

§ 1er. *Théorèmes fondamentaux. Théorème de M. Sturm et applications.*

371. La recherche des racines incommensurables se compose de deux parties bien distinctes : la première, qui se nomme la *séparation des racines*, consiste à déterminer, pour chacune d'elles, deux nombres qui la comprennent et n'en comprennent aucune autre. La seconde, qui se nomme l'*approximation des racines*, a pour but de déterminer, pour chacune d'elles, une valeur aussi approchée qu'on voudra.

En outre, si l'on change dans une équation l'inconnue x en $-x$, on aura une transformée dont les racines positives, prises avec le signe $-$, seront les racines négatives de la proposée. Par conséquent, il suffit de savoir déterminer les racines positives.

La séparation des racines incommensurables repose sur les théorèmes suivants, où nous supposerons l'équation $X=0$ ramenée à la forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} \ldots \pm U = 0,$$

m étant un nombre entier positif, et les coefficients $A, B, \ldots U$ étant des quantités réelles.

Théorèmes fondamentaux sur la séparation des racines.

372. Lemme. *Si dans un polynôme entier par rapport à* x *et à coefficients réels, on fait varier* x *d'une manière continue, le polynôme variera aussi d'une manière continue.*

Soit X le polynôme, et X_1 ce qu'il devient lorsqu'on change x en $x+h$, en désignant par X', X'', X'''.... les polynômes

dérivés de X, on aura (310)

$$X_1 = X + X'h + \frac{1}{2} X''h^2 + \frac{1}{2.3} X'''h^3 + \ldots$$

Or on peut prendre h assez petit, pour que chacun des termes qui suivent X soit aussi petit que l'on veut. Alors il en sera de même de leur somme, et par conséquent X croîtra d'aussi peu qu'on voudra.

373. Théorème I. *Si deux nombres quelconques α et β, substitués à x dans une équation $X = 0$, donnent des résultats de signes contraires, l'équation a au moins une racine réelle comprise entre α et β.*

Soit, par exemple, $\alpha < \beta$; si l'on fait varier x d'une manière continue depuis α jusqu'à β, le polynôme X variera aussi d'une manière continue; et comme dans cet intervalle il change de signe, puisque, par hypothèse, $x = \alpha$ et $x = \beta$ donnent des résultats de signes contraires, il y a donc au moins une valeur de x comprise entre α et β, pour laquelle X doit se réduire à zéro. Cette valeur de x est évidemment racine de $X = 0$.

Remarque. Dans l'intervalle des deux résultats de signes contraires donnés par $x = \alpha$ et $x = \beta$, le polynôme X, croissant d'une manière continue, peut passer plusieurs fois du positif au négatif ou réciproquement; et comme alors il deviendra autant de fois zéro, l'équation $X = 0$ aura le même nombre de racines comprises entre α et β.

374. Théorème II. *Si deux quantités réelles quelconques α et β, substituées dans une équation $X = 0$, donnent des résultats de signes contraires, elles comprendront une racine réelle ou un nombre impair de racines réelles; et si elles donnent des résultats de même signe, elles ne comprendront pas de racine réelle, ou en comprendront un nombre pair.*

Soit toujours $\alpha < \beta$; si α et β donnent des résultats de signes contraires, on vient de voir qu'ils comprendront au moins une racine réelle, et pourront en comprendre davantage.

Soient donc a, b, c, ... l, toutes les racines comprises entre α et β, le polynôme X sera divisible par le produit

$$(x - a)(x - b)(x - c)\ldots(x - l),$$

et en représentant le polynôme quotient par Q, on aura

$$X=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l)Q.$$

Or, si l'on fait successivement $x=\alpha$ et $x=\beta$, en appelant X_1, X_2, et Q_1, Q_2 les résultats de la substitution dans X et dans Q, il vient

$$X_1=(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)\ldots(\alpha-l)Q_1$$
$$X_2=(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)\ldots(\beta-l)Q_2.$$

D'abord les quantités Q_1 et Q_2 sont toujours de même signe; car si elles étaient de signes contraires, l'équation $Q=0$ aurait au moins une racine entre α et β, et par conséquent les racines $a, b, c, \ldots l$ ne seraient pas les seules racines de $X=0$ comprises entre α et β. De plus, les racines $a, b, c, \ldots l$ étant comprises entre α et β, tous les facteurs $\alpha-a$, $\alpha-b\ldots\alpha-l$, sont négatifs, et tous les facteurs $\beta-a$, $\beta-b,\ldots\beta-l$ sont positifs. Donc, si les résultats X_1 et X_2 ont 1° des signes contraires, 2° le même signe, c'est une preuve que dans chacun des produits $(\alpha-a)\ldots(\alpha-l)$, $(\beta-a)\ldots(\beta-l)$, le nombre des facteurs est 1° impair, 2° pair ou bien nul. Par conséquent, le nombre des racines réelles de $X=0$ est 1° impair, 2° nul ou pair.

On conclut évidemment de là que réciproquement

Deux quantités substituées dans une équation donnent des résultats 1° *de signes contraires,* 2° *de même signe, selon qu'elles comprennent un nombre de racines réelles,* 1° *impair,* 2° *nul ou pair.*

Remarque. Dans cette proposition, on n'a égard qu'au nombre des racines et non à leur valeur; de sorte que parmi les racines comprises entre α et β, plusieurs ou même toutes peuvent être égales.

Conséquences des deux théorèmes précédents.

375. Première conséquence. *Toute équation de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à celui de son dernier terme.*

Soit, comme ci-dessus, l'équation $Ax^m+Bx^{m-1}\ldots\pm U=0$,

où m est impair, et où le premier terme Ax^m est toujours censé positif.

1° Supposons le dernier terme U négatif. Si l'on fait $x=0$, on a le résultat négatif $-U$; et si l'on substitue à x la limite supérieure l des racines positives, déterminée comme plus haut (361), on obtient un résultat positif. Donc l'équation a au moins une racine réelle, et en outre positive, comprise entre 0 et $+l$.

2° Supposons le dernier terme U positif. Si l'on met $-x$ à la place de x, on obtient une transformée dont le premier terme x^m est négatif; mais si, pour le rendre positif, on change le signe de tous les termes, le dernier U devient alors négatif. Donc, d'après le premier cas, la transformée a au moins une racine réelle et positive, et par suite la proposée a au moins une racine réelle et négative.

376. Deuxième conséquence. *Toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.*

Car, si l'on fait successivement $x=0$, $x=+l$, on a deux résultats de signes contraires, d'où il suit que la proposée a au moins une racine positive; et si l'on remplace x par $-x$, la transformée, ayant son premier terme positif et son dernier terme négatif, admet au moins une racine positive, qui sera négative dans la proposée.

377. Troisième conséquence. *Toute équation qui n'a point de racines réelles donne toujours des résultats de même signe, lorsqu'on substitue à* x *des quantités réelles quelconques.*

Car si la substitution de deux quantités réelles pouvait donner des résultats de signes contraires, l'équation aurait au moins une racine réelle comprise entre ces deux quantités. C'est le cas de l'équation $Q=0$ qu'on obtient (374) en divisant une équation donnée $X=0$ par le produit des facteurs correspondants aux racines réelles.

Il résulte aussi des deux premières conséquences qu'*une équation dont toutes les racines sont imaginaires est nécessairement de degré pair et a son dernier terme positif.*

Par suite, ses racines imaginaires sont en nombre pair, ce qui est conforme au n° 292.

Remarque. Si une équation $X = 0$ a des racines réelles dont chacune entre un nombre pair de fois, cette équation donnera toujours des résultats de même signe. Car alors elle sera, par exemple, de la forme $(x-a)^{2n}(x-b)^{2p}\ldots(x-l)^{2r}X' = 0$, X' ne contenant plus que les facteurs correspondants aux racines imaginaires; et il est évident que, pour toute valeur réelle de x, chacun des facteurs $(x-a)^{2n}$, $(x-b)^{2p}$,... ne peut changer de signe, ni par conséquent leur produit. D'ailleurs X' ne changera pas de signe; donc X n'en changera pas non plus. Ici l'équation $X = 0$ est de degré pair et a son dernier terme positif.

On voit, en outre, par la troisième conséquence que la réciproque n'est pas vraie, et l'on ne pourrait conclure des considérations précédentes que *toute équation de degré pair, dont le dernier terme est positif, admet des racines réelles.*

378. Quatrième conséquence. *Si une équation a des racines réelles et positives, elles sont en nombre pair ou impair, selon que le dernier terme est positif ou négatif; il en est encore de même pour les racines négatives, si le degré de l'équation est pair; mais s'il est impair, leur nombre est au contraire impair ou pair, selon que le dernier terme est positif ou négatif.*

En effet, 1° lorsque le dernier terme U est positif, les substitutions $x = 0$, $x = +l$, donnant des résultats positifs, les racines positives ne peuvent être qu'en nombre pair (374); et si U est négatif, les mêmes substitutions donnant des résultats de signes contraires, le nombre des racines positives ne peut être qu'impair.

2° L'équation étant de degré pair, si l'on change x en $-x$, le premier terme de la transformée restant positif, U ne change pas de signe; donc si l'on substitue $x = 0$ et $x = l'$ (la nouvelle limite des racines positives), on a des résultats de même signe ou de signes contraires, selon que U est positif ou négatif, et la transformée ne peut avoir, selon le cas, qu'un nombre pair ou impair de racines positives, qui sont négatives dans la proposée.

Mais lorsque l'équation est de degré impair, si l'on remplace x par $-x$, il faudra changer le signe de tous les termes pour que le premier de la transformée soit positif; ainsi U changera de signe. En substituant alors $x=0$ et $x=l'$, on a des résultats de même signe ou de signes contraires, selon que U est positif ou négatif dans la transformée, et par conséquent négatif ou positif dans la proposée. Mais la transformée ne peut avoir qu'un nombre pair de racines positives dans le premier cas, et un nombre impair dans le second. Donc la proposée ne peut avoir qu'un nombre pair ou impair de racines négatives, selon que son dernier terme est négatif ou positif.

Voici le tableau de ces différents cas :

	Degré pair.		Degré impair.	
	$+U$	$-U$	$+U$	$-U$
Racines positives	$2n$	$2n+1$	$2n$	$2n+1$
Racines négatives	$2n$	$2n+1$	$2n+1$	$2n$.

Séparation des racines.

379. Lorsqu'on veut appliquer les méthodes à l'aide desquelles on sépare les racines d'une équation, on reconnaît qu'elles exigent des calculs très-compliqués, et d'autant plus longs que le degré de l'équation est plus élevé : il faut donc l'abaisser le plus possible, et c'est à quoi l'on parvient en divisant l'équation par le produit des facteurs correspondants à toutes les racines commensurables, soit égales, soit inégales, qu'on détermine aisément par les procédés fort simples indiqués plus haut.

D'ailleurs presque toutes les méthodes de séparation exigent que l'équation n'ait plus de racines égales ; c'est ce que suppose celle dite *de Lagrange*, la première méthode rigoureuse qui ait été connue, et qui est basée sur le calcul de l'équation aux carrés des différences. Cette méthode fut néanmoins découverte par Waring, en 1762, mais resta complétement ignorée jusqu'au moment où Lagrange y parvint de son côté, sans connaître le mémoire de Waring, et la publia.

Au reste, comme elle devient presque impraticable, lorsque

le degré de l'équation est un peu élevé, à cause de l'excessive longueur du calcul de l'équation aux carrés des différences, nous nous bornerons à en donner un simple exposé.

380. *Méthode de Lagrange.* Soit une équation $X = o$ qui n'a pas de racines égales, et dont il faut déterminer toutes les racines réelles positives (371). Si l'on y remplace successivement x par des nombres positifs pris entre les limites inférieure et supérieure des racines positives, et croissants à partir de cette limite inférieure, de manière qu'il ne puisse tomber qu'une seule racine entre deux nombres consécutifs, il est clair que l'examen du signe des résultats fera connaître sûrement (374) quels sont ceux des nombres substitués qui comprennent une racine ou qui n'en comprennent pas. Toute la question consiste donc à déterminer la différence qui doit exister entre deux quelconques de ces nombres consécutifs, pour qu'on soit assuré qu'ils ne puissent comprendre plus d'une racine. Or on satisfait évidemment à cette condition en prenant pour la différence en question un nombre δ plus petit que la plus petite différence possible entre les racines positives de la proposée, c'est-à-dire la limite inférieure des racines positives de l'équation aux différences, ou la racine carrée de la limite analogue pour l'équation aux carrés des différences. Par conséquent, en nommant λ cette limite, on prendra δ égal à $\sqrt{\lambda}$ ou $<\sqrt{\lambda}$ lorsque λ ne sera pas un carré.

Si l'on peut avoir une limite $\lambda > 1$, on prendra pour δ le nombre entier immédiatement inférieur à $\sqrt{\lambda}$. Alors on séparera les racines positives de la proposée en n'y substituant que des nombres entiers pris entre les limites supérieure et inférieure, rapprochées d'ailleurs le plus possible, pour restreindre les substitutions. Dès qu'on sera sûr que deux de ces nombres comprennent une racine, on substituera encore les nombres entiers intermédiaires, de sorte qu'en examinant les signes des résultats, on assignera les deux nombres entiers consécutifs qui comprennent cette racine.

Mais ordinairement la limite λ, et par suite δ, sera > 1, alors on évitera les substitutions de nombres fractionnaires, en faisant $x = \delta y$ dans la proposée, ce qui la changera en une autre

dont les racines seront celles de la proposée divisées par δ, et par conséquent différeront entre elles de plus d'une unité. Car soient a et b deux racines de la proposée; on a, par hypothèse, $a - b > \delta$, d'où $\frac{a}{\delta} - \frac{b}{\delta} > 1$. Ainsi, en ne substituant dans la transformée en y que des nombres entiers, on pourra placer chacune de ses racines réelles entre deux nombres entiers consécutifs, et en divisant ceux-ci par δ, on aura les nombres qui comprennent les racines correspondantes de la proposée.

Au reste, avant de se livrer au calcul très-pénible de l'équation aux carrés des différences, il faudra voir si l'on ne peut séparer autrement les racines de la proposée. Or, si l'on y substitue tous les nombres entiers consécutifs, compris entre les limites bien précises des racines tant positives que négatives, et que les résultats donnent un nombre de changements de signe égal au degré de l'équation, il en résulte que toutes les racines sont réelles, et leur séparation se trouve effectuée.

Heureusement le théorème de M. Sturm, qui donne immédiatement la séparation de toutes les racines réelles, dispense, dans tous les cas, de recourir à l'équation aux carrés des différences.

Pour exposer ce théorème, nous supposerons d'abord que l'équation proposée n'a pas de racines égales, mais nous montrerons plus loin (390) qu'il s'applique de même lorsque l'équation en admet.

Théorème de M. Sturm. — Son emploi dans la recherche des racines réelles.

381. Voici d'abord quelques considérations préliminaires. Deux termes consécutifs d'un polynôme forment, suivant qu'ils ont le même signe ou des signes contraires, ce qu'on appelle une *permanence* ou une *variation*. Ainsi l'équation

$$x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x - 6 = 0$$

a trois variations et une permanence.

Soit maintenant $X = o$ une équation qui n'a plus de racines égales, et dont tous les coefficients sont, bien entendu, des nombres réels. Formons le polynôme dérivé X_1 de X, et opérons comme s'il s'agissait de chercher le plus grand commun diviseur entre X et X_1, excepté que nous changerons les signes de tous les restes, à mesure qu'ils serviront de diviseurs, ce qui est nécessaire pour le succès de la méthode. Divisons donc X par X_1, nommons X_2 ce que devient le reste de degré inférieur à X_1, quand on a changé son signe, et Q_1 le quotient, nous aurons

$$X = X_1 Q_1 - X_2.$$

Divisons X_1 par X_2, en nommant Q_2 le quotient, et X_3 ce que devient le reste quand on a changé son signe, nous aurons

$$X_1 = X_2 Q_2 - X_3.$$

En continuant ainsi, nous arriverons nécessairement à un reste numérique $-X_r$. Car si ce reste était nul, l'équation $X = o$ aurait des racines égales, ce qui est contre l'hypothèse.

On peut, dans les divisions successives, éviter les coefficients fractionnaires en multipliant les dividendes par des facteurs numériques convenables, mais toujours positifs, afin de ne pas altérer le signe des restes, ce qui est le point essentiel.

L'opération fournira donc cette suite de relations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X \quad = X_1 \, . \, Q_1 \quad - X_2 \\ X_1 \quad = X_2 \, . \, Q_2 \quad - X_3 \\ X_2 \quad = X_3 \, . \, Q_3 \quad - X_4 \\ X_{n-2} = X_n \, . \, Q_n \quad - X_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{r-2} = X_{r-1} Q_{r-1} - X_r. \end{array} \right.$$

Cela posé, on détermine le nombre des racines réelles de l'équation $X = o$ comprises entre deux nombres quelconques α et β, au moyen du beau théorème de M. Sturm, dont voici l'énoncé :

382. THÉORÈME. *Si dans la suite des fonctions*

$$X, X_1, X_2, \ldots\ldots X_n \ldots\ldots X_r$$

on substitue à x deux nombres quelconques α *et* β, α *étant* $< \beta$,

et qu'on écrive par ordre les signes de tous les résultats fournis, 1° par $x = \alpha$, sur une première ligne, 2° par $x = \beta$, sur une seconde ligne, l'équation $X = 0$ aura autant de racines réelles comprises entre α et β que la seconde ligne contiendra de variations de moins que la première.

D'après cet énoncé, si le nombre des variations de la première ligne ne surpassait pas celui des variations de la seconde, l'équation n'aurait pas de racines réelles comprises entre α et β.

Avant de démontrer le théorème, nous remarquerons que les relations (1) du n° précédent fournissent immédiatement les deux conséquences suivantes :

1° Une même valeur x ne peut annuler deux fonctions consécutives de la suite $X, X_1, X_2, \ldots$ par exemple X_{n-1} et X_n. Car alors, d'après l'égalité $X_{n-1} = X_n Q_n - X_{n+1}$, on aurait encore $X_{n+1} = 0$, et, en descendant de proche en proche, on devrait avoir de même $X_r = 0$, ce qui ne peut être, puisque X_r est un nombre.

2° Si une certaine valeur de x annule une fonction *intermédiaire*, telle que X_n, c'est-à-dire, comprise entre les fonctions extrêmes X et X_r, la précédente X_{n-1} et la suivante X_{n+1} seront de signes contraires. Car dès qu'on a $X_n = 0$, l'égalité ci-dessus devient $X_{n-1} = - X_{n+1}$.

Cela posé, pour procéder à la démonstration du théorème, nous avons à examiner comment il peut s'introduire des changements dans la suite des signes des fonctions $X, X_1, X_2, \ldots X_r$ (ce que nous désignerons, pour abréger, par la *suite des signes*), lorsqu'on fait croître x d'une manière continue à partir de $x = a$. Or, il est évident que cette suite actuelle de signes ne s'altérera pas, tant que x n'aura pas atteint une valeur capable d'annuler une ou plusieurs des fonctions $X, X_1, X_2, \ldots X_{r-1}$; nous ne mettons pas X_r, qui, étant un nombre, ne peut devenir nul. Supposons donc que x ait atteint une valeur a qui annule une ou plusieurs de ces fonctions. Il peut arriver que la première fonction X ne fasse point partie de celles qui s'annulent, ou qu'elle en fasse partie. Nous examinerons successivement ces deux cas.

Ier CAS. Soit X_n une fonction intermédiaire qui s'annule pour $x=a$. D'après ce qu'on vient d'observer (1° et 2°), les fonctions adjacentes X_{n-1} et X_{n+1} ne pourront s'annuler pour $x=a$, mais seront deux nombres de signes contraires. Ainsi, quel que soit le signe qu'on suppose à la fonction nulle X_n, les signes des trois fonctions X_{n-1}, X_n, X_{n+1} donnent toujours une variation, et n'en donnent qu'une seule. Comme d'ailleurs aucune des deux fonctions X_{n-1} et X_{n+1} n'a changé de signe pour les substitutions faites depuis $x=\alpha$ jusqu'à $x=a$, il est clair que ces deux fonctions ont toujours dû être de signes contraires depuis $x=\alpha$. Donc, quel qu'ait pu être le signe de X_n avant de faire $x=a$, les signes des trois fonctions donnaient une seule variation.

D'un autre côté, si l'on fait $x=a+h$, h étant une quantité positive qu'on peut prendre aussi petite qu'on voudra, et de manière que les équations $X_{n-1}=0$, $X_{n+1}=0$ n'aient aucune racine comprise entre a et $a+h$, aucune des fonctions X_{n-1} et X_{n+1} ne changera de signe quand x croîtra dans cet intervalle, et par conséquent elles seront encore de signes contraires. Donc, quel que puisse être le signe de X_n, les signes des trois fonctions donneront toujours une seule variation.

Si quelque autre fonction intermédiaire s'annulait aussi pour $x=a$, comme aucune des deux fonctions adjacentes ne pourrait s'annuler en même temps, on raisonnerait sur ces trois nouvelles fonctions consécutives comme sur les trois premières; et ainsi de suite, quel que soit le nombre des fonctions intermédiaires annulées par $x=a$.

Par conséquent, pour toutes les valeurs de x comprises entre a et $a+h$, la suite des signes des fonctions X_1, X_2, ... X_r contiendra toujours le même nombre de variations, qui pourront seulement être disposées dans un autre ordre.

Il est clair qu'il en sera encore de même quand x croîtra au delà de $a+h$ de manière à dépasser une valeur qui annule également une des fonctions intermédiaires. En effet, tant que cette valeur de x ne rend pas X nul, on peut prouver, exactement comme ci-dessus, que la suite des signes des fonc-

tions $X_1, X_2, \ldots X_r$ doit toujours offrir le même nombre de variations qu'auparavant.

Voyons maintenant ce qui arrive dans la suite des signes, lorsque x atteint et dépasse une des racines de l'équation $X=0$, ce qui forme notre second cas.

IIe CAS. Soit a une racine de $X=0$. Examinons ce que devient la suite des signes pour $x=a-h$ et pour $x=a+h$, h étant une quantité positive aussi petite qu'on voudra.

Faisons d'abord $x=a-h$, et désignons pour un instant X par $f(x)$; en observant que $f(a)=0$, et que $f'(a)$ est différent de zéro, puisque l'équation $X=0$ n'a pas de racines égales, on aura (310)

$$f(a-h)=-\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)-\frac{h^3}{1.2.3}f'''(a)+\text{etc.}$$

Or on peut prendre h assez petit 1° pour que le signe du second membre ne dépende que de celui du premier terme (279), et alors $f(a-h)$ et $f'(a)$ seront de signes contraires; 2° pour que $f'(x)$ n'ait pas de racine comprise entre $a-h$ et $a+h$; alors $f'(a-h)$, $f'(a)$ et $f'(a+h)$ seront de même signe. Il suit de là que $f(a-h)$ et $f'(a-h)$ seront de signes contraires.

Si l'on fait maintenant $x=a+h$, on aura

$$f(a+h)=\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(a)+\text{etc.},$$

et l'on verra, comme tout à l'heure, que, pour de très-petites valeurs h, $f(a+h)$ et $f'(a)$ seront de même signe, ainsi que $f(a+h)$ et $f'(a+h)$.

Donc, avant que x ait atteint la valeur a, il existait une *variation* de X à X_1, laquelle se change en *permanence*, lorsque x dépasse cette valeur.

Or il résulte du premier cas que la suite des signes des fonctions $X_1, X_2, \ldots X_r$ conserve toujours, pour des valeurs de x un peu plus petites ou un peu plus grandes que a, le même nombre de variations, lors même que la valeur $x=a$ réduit à zéro quelque fonction intermédiaire.

Donc lorsque x, en croissant par degrés insensibles à partir

de $x=\alpha$, vient à dépasser une racine de l'équation $X=0$, la suite des signes des fonctions $X, X_1, X_2, \ldots X_r$ perd une variation, qui est remplacée par une permanence.

Si maintenant x continue à croître, le nombre précédent des variations restera le même jusqu'à ce que x dépasse une autre racine de $X=0$, ce qui fera perdre encore une variation; et ainsi de suite.

Par conséquent, lorsqu'on fait croître x depuis $x=\alpha$ jusqu'à $x=\beta$, le nombre des variations perdues par la suite des signes des mêmes fonctions est précisément égal au nombre des racines réelles de $X=0$ comprises entre α et β.

C'est le théorème qu'il fallait démontrer.

383. *Remarque* I. Il peut arriver qu'une des fonctions $X, X_1, X_2 \ldots X_{r-1}$ devienne nulle pour $x=\alpha$ ou pour $x=\beta$. Si c'est une fonction intermédiaire X_n qui s'évanouit, on peut en faire abstraction et n'en tenir aucun compte. Car cette fonction étant alors toujours placée entre deux fonctions qui ne s'évanouissent pas et qui sont de signes contraires, les signes des trois fonctions consécutives X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, offriront toujours une variation et une permanence; et la variation aura encore lieu, si l'on omet le signe de X_n. Lorsque X s'évanouit pour $x=\beta$, par exemple, il en résulte que β est racine. Alors, en substituant pour x des valeurs un peu plus grandes que β, le second cas de la démonstration ci-dessus montre qu'il y a une permanence de X à X_1, et que les signes de toutes les autres fonctions, à partir de X_2, conservent le même nombre de variations que pour $x=\beta$. On connaîtra donc, d'après le théorème, le nombre de racines réelles comprises entre β et une quantité un peu plus grande que β.

384. *Remarque* II. Il peut encore arriver que pour toutes les valeurs de x comprises entre α et β, une fonction intermédiaire X_n conserve toujours le même signe, ou, ce qui revient au même, ne puisse pas devenir zéro. Alors il est inutile d'avoir égard aux fonctions qui suivent X_n, et pour trouver le nombre des racines réelles de l'équation $X=0$, il suffira de substituer α et β dans la suite des fonctions $X, X_1, X_2 \ldots X_n$. En effet, il est clair qu'en faisant croître x, seulement depuis α jus-

qu'à β, la démonstration relative au système complet des fonctions X, X_1, $X_2 \ldots\ldots X_r$, dont la dernière est un nombre constant, s'appliquera mot pour mot au système actuel, dont la dernière fonction X_n, quoique n'ayant pas une valeur constante, a toujours le même signe.

385. Pour appliquer le théorème ci-dessus à une équation donnée, qui n'a plus de racines égales, on forme d'abord la suite des fonctions X, X_1, $X_2 \ldots X_r$, et l'on y substitue, au lieu de x, les deux limites supérieures des racines tant positives que négatives, ou bien deux nombres plus grands, en valeur absolue. On peut même s'abstenir de toute substitution, puisque, pour une valeur de x suffisamment grande, chacune des fonctions ci-dessus a le même signe que son premier terme (278). Il suit de là que, si l'on compte le nombre de variations que présente la suite des signes des premiers termes, 1° après avoir changé x en $-x$, 2° en prenant les signes tels qu'ils sont; l'équation $X = 0$ aura précisément autant de racines réelles que la seconde suite aura de variations de moins que la première.

On peut encore trouver séparément le nombre des racines réelles positives et celui des racines négatives, en substituant $x = 0$ dans toutes les fonctions; ce qui réduit chacune à son dernier terme.

On voit alors que *l'équation a autant de racines positives que la suite des signes des premiers termes contient de variations de moins que la suite des signes des derniers termes, et autant de racines négatives que cette dernière suite contient de variations de moins que la suite des signes des premiers termes où l'on a changé* x *en* $-x$.

386. Lorsqu'on effectue la recherche du plus grand commun diviseur entre X et X_1 pour déterminer les autres fonctions, il arrive ordinairement que le degré de chaque reste est seulement inférieur d'une unité au degré du reste précédent, de sorte que les fonctions auxiliaires $X_1, X_2, \ldots X_r$ sont précisément en nombre égal au degré m de l'équation $X = 0$. Alors, du n° qui précède on conclut le théorème suivant:

THÉORÈME II. *L'équation* $X = 0$ *a autant de couples de racines*

imaginaires qu'il y a de variations dans la suite des signes des premiers termes des m *fonctions auxiliaires* $X_1, X_2 \ldots X_m$.

En effet, dans le cas actuel les m fonctions auxiliaires sont de la forme mx^{m-1}, F_2x^{m-2}, $F_3x^{m-3}\ldots\ldots F_m$, la dernière fonction F_m étant le reste indépendant de x; et l'on voit que deux fonctions consécutives quelconques F_nx^n, $F_{n+1}x^{n+1}$, sont nécessairement l'une de degré pair, l'autre de degré impair. D'où il résulte que si les signes de ces deux fonctions forment une permanence quand x est positif, ils formeront une variation quand x sera négatif, et réciproquement. Par conséquent, chaque variation qu'offre la suite des signes des m fonctions, pour x positif, fait diminuer de deux unités l'excès du nombre des variations de cette suite de signes pour x négatif, sur le nombre des variations de la même suite pour x positif. Or, cet excès indique précisément le nombre des racines réelles de l'équation $X=0$. Donc pour chaque variation fournie par la suite des signes des m fonctions, l'équation $X=0$ se trouve avoir deux racines réelles de moins, c'est-à-dire deux racines imaginaires de plus, conformément à l'énoncé du théorème.

De là se déduit immédiatement la conclusion suivante :

Pour que l'équation $X=0$ *ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit que les premiers termes des* m *fonctions* $X_1, X_2, X_3 \ldots, X_m$ *soient tous de même signe.*

Les conditions de la réalité des racines d'une équation du degré m sont donc au plus au nombre de $m-1$. Mais elles peuvent être en nombre moindre, parce que plusieurs des conditions peuvent rentrer les unes dans les autres.

387. Lorsqu'on a trouvé combien l'équation a de racines réelles, on procède à leur séparation; et pour séparer les racines positives, on substitue dans la suite des fonctions $X, X_1, X_2 \ldots X_r$, des nombres positifs croissants $0, \alpha, \beta, \gamma \ldots$, et le nombre des variations perdues à chaque substitution indiquera combien il y a de racines entre 0 et α, entre α et $\beta \ldots$ On continue les substitutions seulement jusqu'à ce qu'on arrive à une suite de signes ayant autant de variations que la suite des signes des premiers termes pour x positif; car alors

il ne peut y avoir de racine au delà du dernier nombre substitué.

Lorsqu'il y a plusieurs racines comprises entre deux substitutions consécutives, on fait des substitutions intermédiaires, jusqu'à ce qu'on parvienne à isoler chaque racine entre deux nombres, qui sont ainsi ses limites spéciales.

Pour la facilité du calcul, on choisit d'abord pour o, α, β, γ..., la suite o, 1, 10, 100..., ce qui offre en outre l'avantage de faire connaître combien il y a de racines entre o et 1, 1 et 10,...

388. Prenons, pour exemples de la séparation des racines, les équations suivantes qui n'en ont plus d'égales.

EXEMPLE I. Soit l'équation $x^3 - 5x - 6 = 0$.

On a
$$X = x^3 - 6x - 6,$$
$$X_1 = 3x^2 - 5.$$

La fonction X_2 s'obtient en divisant X par X_1, après avoir toutefois multiplié X par 3, pour éviter les fractions. On trouve le reste $-10x - 18$, qui, divisé par $+2$, se réduit à $-5x - 9$; donc
$$X_2 = 5x + 9.$$

La fonction X_3 s'obtient en divisant X_1 par X_2. On évite les fractions en multipliant X_1 par 5, ainsi que le reste du premier degré en x. On trouve $+118$ pour le reste indépendant de x; donc $X_3 = -118$.

Ainsi la suite des fonctions est
$$X = x^3 - 5x - 6,\ X_1 = 3x^2 - 5,\ X_2 = 5x + 9,\ X_3 = -118.$$

Donnant à x une valeur 1° négative, 2° positive, les premiers termes de ces fonctions fournissent les deux suites de signes
$$1^\circ\ (-x) \ldots - + - -,$$
$$2^\circ\ (+x) \ldots + + + -,$$
dont la première a deux variations, et la seconde une seule. D'où il suit (375) que l'équation a une seule racine réelle. Le dernier terme de l'équation étant négatif, cette racine est positive (375), comme on peut le voir encore en faisant $x = 0$ dans les mêmes fonctions. Car alors on a la suite des signes
$$- - + -,$$

offrant le même nombre de variations que la première des deux suites ci-dessus.

Maintenant pour assigner deux limites à la racine, on peut faire abstraction des fonctions X_1, X_2, X_3, et se borner à effectuer les substitutions dans X. Cette fonction étant négative pour $x=0$, il en résulte que la racine est comprise entre 0 et la limite supérieure $1+\sqrt{6}$ (361) ou 4; et comme les substitutions intermédiaires $x=2$, $x=3$, donnent encore des résultats, l'un négatif, l'autre positif, la racine est entre les nombres 2 et 3. Nous donnons plus loin (396) les méthodes servant à calculer sa valeur avec telle approximation qu'on voudra.

Exemple II. Soit l'équation $x^3-7x+7=0$.

Le calcul des fonctions n'offrant aucune difficulté, nous nous bornerons à indiquer les résultats.

On a

$$X=x^3-7x+7,\ X_1=3x^2-7,\ X_2=2x-3,\ X_3=+1.$$

Donnant à x une valeur 1° négative, 2° positive, les premiers termes fournissent les deux suites de signes

$$1^\circ\ (-x)\ldots\ldots - + - +$$
$$2^\circ\ (+x)\ldots\ldots + + + +.$$

La première ayant trois variations, et la seconde n'en ayant aucune, il en résulte que les trois racines sont réelles.

On aurait pu voir *à priori*, en faisant $x=0$, que l'équation a une racine négative et deux positives; mais cette substitution est comprise dans les suivantes.

Pour séparer les racines, on substitue successivement à x la suite -10, -1, 0, $+1$, $+10$; alors les signes des quatre fonctions fournissent le tableau ci-après :

	X	X_1	X_2	X_3
$x=-10$	−	+	−	+
$x=-1$	+	−	−	+
$x=0$	+	−	−	+
$x=+1$	+	−	−	+
$x=+10$	+	+	+	+

D'où il résulte que l'équation a une racine comprise entre -1 et -10, et deux autres entre 1 et 10.

La substitution intermédiaire $x=2$ donne la suite

$$x=2\ldots\ldots+\;+\;+\;+,$$

qui, étant comparée à la suite fournie par $x=1$, apprend que les deux racines positives sont comprises entre 1 et 2. Enfin, en substituant $x=1,5$, on a pour X un résultat négatif, qui montre qu'une des racines positives est comprise entre 1 et 1,5, et l'autre entre 1,5 et 2.

Si maintenant on effectue les substitutions intermédiaires -2, -3,.... on trouve que la racine négative est comprise entre -3 et -4.

La séparation des racines est donc tout à fait opérée.

EXEMPLE III. Soit encore l'équation

$$x^4-4x^3-3x+27=0.$$

On a

$$X=x^4-4x^3-3x+27,\; X_1=4x^3-12x^2-3,\; X_2=4x^2+3x-35,$$
$$X_3=-185x+537,\; X_4=-253636.$$

Les signes de ces cinq fonctions, relatifs à diverses valeurs de x, fournissent le tableau suivant :

	X	X_1	X_2	X_3	X_4
$(-x)$	+	−	−	+	−
$x=0$....	+	−	−	+	−
$x=1$....	+	−	−	+	−
$x=10$....	+	+	+	−	−
$(+x)$	+	+	+	−	−
$x=1$....	+	−	−	+	−
$x=2$....	+	−	−	+	−
$x=3$....	−	−	+	−	−
$x=4$....	+	+	+	−	−

Les deux premières lignes, ayant le même nombre de variations, montrent qu'il n'y a pas de racines négatives.

La troisième ligne ayant deux variations de plus que la qua-

trième, il y a deux racines réelles comprises entre 1 et 10.

En outre, la quatrième ligne offrant la même suite de signes que les premiers termes des fonctions pour x positif, il n'y a pas de racines réelles au delà de 10, ni même au delà de 5, qui est la limite supérieure des racines positives.

Ainsi l'équation a deux racines réelles positives comprises entre 1 et 6, et deux racines imaginaires.

La seconde partie du tableau montre que l'une des racines est comprise entre 2 et 3, et l'autre entre 3 et 4.

389. Si l'on veut appliquer ce qui a été dit plus haut (386) à la recherche des conditions nécessaires, pour que l'équation $x^3+Qx+R=0$ ait ses trois racines réelles, on forme d'abord la suite des fonctions, qui sont

$$X=x^3+Qx+R,\quad X_1=3x^2+Q,\quad X_2=-2Qx-3R,$$
$$X_3=-4Q^3-27R^2.$$

Pour que les premiers termes soient tous positifs pour une valeur positive de x, il faut qu'on ait

$$-2Q>0,\quad -4Q^3-27R^2>0 \text{ ou } Q<0,\ 4Q^3+27R^2<0.$$

La seconde condition, qui comprend la première, est la seule nécessaire et suffisante.

390. Nous allons maintenant faire voir que le théorème de M. Sturm peut encore s'appliquer lorsque l'équation $X=0$ a des racines égales; alors le premier membre est de la forme

$$X=(x-a)^n(x-b)^{n'}(x-c)(x-d)\ldots.$$

et en opérant sur les fonctions X et X_1 pour en déduire les fonctions X_2, X_3,.... comme on l'a prescrit (381), on sera conduit à un reste X_r, fonction de x, qui sera le plus grand commun diviseur de X et de X_1, et divisera exactement chacun des restes précédents X_2, X_3,....X_{r-1}.

Or, si l'on divise les fonctions X, X_1, X_2... X_r par X_r, en représentant les quotients respectifs par V, V_1, V_2,....V_r, on reconnaît aisément que le théorème démontré plus haut (382) s'applique immédiatement à la suite des fonctions $V, V_1, V_2, \ldots V_r$, relativement à l'équation $V=0$, c'est-à-dire, que

Si dans la suite des fonctions V, V_1, V_2,.... V_r, *on substitue*

à x *deux nombres quelconques* α *et* β, α *étant* $<\beta$, *l'équation* $V=0$ *aura autant de racines réelles comprises entre* α *et* β, *que la suite des signes de ces fonctions pour* $x=\beta$ *contiendra de variations de moins que la même suite de signes pour* $x=\alpha$.

En effet, d'abord le dernier quotient V_r est égal à l'unité.

De plus, les relations (1) du n° 381, $X=X_1Q_1-X_2$, etc., auront toujours lieu, et en les divisant toutes par X_r, on aura les nouvelles relations

$$V=V_1Q_1-V_2,\quad V_1=V_2Q_2-V_3,\ \text{etc.}$$

D'où il résulte (382, 1°, 2°) que si une certaine valeur de x annule une fonction intermédiaire V_n, les deux voisines V_{n-1}, V_{n+1} seront de signes contraires, et aucune des deux ne pourra être nulle.

Il reste à prouver que si a est racine de l'équation $V=0$, les deux fonctions V et V_1 sont de signes contraires pour $x=a-h$, et de même signe pour $x=a+h$, comme dans le second cas du n° 382, quoique la fonction V_1 ne soit pas ici la dérivée de V.

A cet effet, cherchons la valeur des fonctions V et V_1; comme elles sont les quotients de X et de X_1 par le plus grand commun diviseur X_r qui égale (313) $(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'-1}$, on aura, d'après la composition de X_1 (313),

$$V=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots.$$

$$V_1=\left\{\begin{array}{l} n(x-b)(x-c)(x-d)\ldots+n'(x-a)(x-c)(x-d)\ldots \\ +\ (x-a)(x-b)(x-d)\ldots+\text{etc.}\end{array}\right.$$

Or, si l'on fait $x=a-h$, h étant une quantité aussi grande qu'on voudra, la première partie $n(x-b)(x-c)(x-d)\ldots$, qui entre dans la valeur de V_1, sera plus grande que la somme des autres parties qui contiennent toutes le facteur $x-a$, et par conséquent le signe de V_1 sera celui de la première partie; mais celle-ci, multipliée par $x-a$ et divisée par n, forme la valeur de V. Donc V et V_1 seront 1° de signes contraires, pour $x=a-h$, le facteur $x-a$ devenant $-h$; 2° de même signe, pour $x=a+h$, le facteur $x-a$ devenant $+h$.

D'ailleurs il est même inutile de calculer les quotients $V, V_1, V_2\ldots$, puisque les fonctions $X, X_1, X_2\ldots$ étant égales à

ces quotients multipliés par le plus grand commun diviseur X_r, il est évident que pour $x = \alpha$, par exemple, elles auront toutes les mêmes signes que les quotients $V, V_1, V_2 \ldots$ ou des signes contraires, selon que $x = \alpha$ rendra X_r positif ou négatif. Par conséquent les deux suites auront toujours le même nombre de variations, quelque valeur qu'on donne à x.

De là résulte ce beau théorème général :

Théorème. *Étant donnée une équation quelconque* $X = 0$, *si dans la suite des fonctions* $X, X_1, \ldots\ldots, X_r$, *on substitue à* x *deux nombres* α *et* β, α *étant* $< \beta$, *l'équation* $X = 0$ *aura autant de racines réelles entre* α *et* β, *abstraction faite du degré de multiplicité de chaque racine, que la suite des signes de ces fonctions pour* $x = \beta$ *contiendra de variations de moins que la même suite de signes pour* $x = \alpha$.

§ 2. *Théorèmes de Descartes et de Rolle.*

391. Ce qui précède résout complétement l'importante question de la séparation des racines. Toutefois nous ne quitterons pas ce sujet sans exposer deux théorèmes qui s'y rattachent, avertissant ceux qui veulent les omettre qu'ils peuvent passer immédiatement au n° 396.

Théorème de Descartes. *Dans une équation complète ou incomplète le nombre des racines positives ne peut surpasser le nombre des variations* (*).

Cette proposition sera prouvée, si l'on fait voir qu'en multipliant le premier membre d'une équation quelconque par un nouveau facteur $x - a$ correspondant à une racine positive a, le produit aura au moins une variation de plus que le multiplicande.

(*) On énonçait autrefois ce théorème comme il suit : *Une équation quelconque ne peut admettre plus de racines positives que de variations, ni plus de racines négatives que de permanences.* Mais la seconde partie de l'énoncé n'est exacte que pour une équation complète, ce que la première partie n'exige pas.

Prenons donc l'équation complète ou incomplète

$$x^m + \ldots - Px^{m-n} - \ldots + Qx^{m-p} + \ldots \pm Tx^{m-q} \ldots \pm U = 0$$

où les termes sont positifs depuis x^m jusqu'à $-Px^{m-n}$, de là négatifs jusqu'à $+Qx^{m-p}$, puis redeviennent encore un certain nombre de fois positifs et négatifs jusqu'à $\pm Tx^{m-q}$, tous les termes ayant ensuite le même signe jusqu'au dernier $\pm U$.

En multipliant le premier membre par $x-a$, et représentant par p, q, t..... les coefficients qui précèdent immédiatement P, Q, T...., l'opération pourra se disposer comme il suit :

$$\begin{array}{l}
x^m \ldots\ldots - Px^{m-n} \ldots\ldots + Qx^{m-p} \ldots\ldots \pm Tx^{m-q} \ldots \pm Ux \\
x - a \\
\hline
x^{m+1} \ldots \left.\begin{array}{r} -P \\ -ap \end{array}\right| x^{m-n+1} \ldots \left.\begin{array}{r} +Q \\ +aq \end{array}\right| x^{m-p+1} \ldots \left.\begin{array}{r} \pm T \\ \pm at \end{array}\right| x^{m-q+1} \pm Ux \quad \mp aU
\end{array}$$

Dans ce produit, aucun des termes de la première ligne ne peut être nul, et ceux de la seconde ligne auront tous, à moins qu'ils ne soient nuls, les mêmes signes que les termes de la première ligne contenant les mêmes puissances de x.

Or, le produit total a au moins une variation depuis le premier terme x^{m+1} jusqu'au terme $-(P+ap)x^{m-n+1}$, tandis que le multiplicande n'en contient qu'une de x^m à $-Px^{m-n}$; de même il y a au moins une variation de $-(P+ap)x^{m-n+1}$ à $+(Q+aq)x^{m-p+1}$, et une seule de $-Px^{m-n}$ à $+Qx^{m-p}$; en continuant ainsi, on voit qu'il y a au moins une variation du terme en x^{m-q+1} au dernier $\mp aU$, tandis que le multiplicande n'en a aucune pour les termes correspondants $\pm Tx^{m-q}$ et $\pm U$. Donc le produit a au moins une variation de plus que le multiplicande.

Si dans la proposée on change x en $-x$, et qu'on applique le même théorème à la transformée, on en conclut que *le nombre des racines négatives d'une équation ne peut surpasser le nombre des variations de la transformée provenant du changement de* x *en* $-$x *dans cette équation.*

392. On peut déduire de ce qui précède les conséquences suivantes :

1° *Si le nombre des racines positives d'une équation est*

moindre que celui des variations, la différence est un nombre pair.

En effet, toute équation, selon que son dernier terme est positif ou négatif, a un nombre pair ou impair de racines positives (378), et aussi un nombre pair ou impair de variations.

2° *Dans une équation complète, le nombre des racines négatives égale au plus le nombre des permanences.*

En effet, la transformée, déduite de la proposée par le changement de x en $-x$, s'obtenant alors en changeant les signes des termes de rang pair, les variations deviennent des permanences, et réciproquement.

Mais il n'en est plus ainsi, lorsque l'équation n'est pas complète; par exemple, l'équation $x^3-2x+6=0$ n'offre pas de permanence et a cependant une racine réelle négative (375).

Cependant la même proposition s'applique aux équations incomplètes, en ayant soin d'y rétablir les termes manquants qu'on peut regarder comme ayant ± 0 pour coefficient. L'équation ci-dessus devient alors $x^3 \pm 0x^2 - 2x + 6 = 0$, qui offre toujours une permanence, quel que soit le signe qu'on donne au second terme.

3° *Si une équation complète a toutes ses racines réelles, il y en a autant de positives que de variations, et autant de négatives que de permanences.*

En effet, soient m le degré de l'équation, p le nombre des racines positives, n celui des négatives, V et P le nombre de variations et de permanences. On aura d'abord $p+n=m$, et comme l'équation est complète, on aura aussi $V+P=m$; d'où l'on conclut l'égalité $p+n=V+P$. Mais il suit encore de là que, si l'on avait $p<V$, on aurait aussi $n<P$, ce qui ne peut être; donc $p=V$, et $n=P$.

4° *Si le nombre total des variations contenues dans une équation quelconque et dans la transformée qu'on obtient en changeant* x *en* $-$x, *est moindre que le degré de l'équation, la proposée a nécessairement des racines imaginaires.*

5° *Toute équation incomplète, qui manque soit de plusieurs*

termes consécutifs, soit d'un seul terme compris entre deux termes de même signe, a des racines imaginaires.

En effet, lorsqu'une équation de degré m manque de certains termes, si l'on choisit les signes des termes manquants de manière que le nombre des variations soit d'abord un nombre v le plus grand possible, et ensuite un nombre v' le plus petit possible, il est clair que le plus petit nombre de permanences sera $m-v$, et que par conséquent l'équation aura au plus $m-v$ racines négatives; mais comme d'un autre côté elle en a au plus v' positives, il en résulte que son *maximum* de racines réelles sera $m-v+v'$ ou $m-(v-v')$, et que par suite l'équation aura au moins $v-v'$ racines imaginaires.

Cette différence $v-v'$, qui est essentiellement positive, ne peut être nulle, soit lorsqu'il manque plusieurs termes consécutifs, soit lorsqu'il manque un seul terme entre deux autres de même signe.

En effet, dans le premier cas, on peut supposer tous les termes manquants de même signe, ce qui donne un certain nombre de permanences, ou bien alternativement positifs ou négatifs, ce qui donne un certain nombre de variations. Donc $v-v'$ ne sera pas nul.

S'il manque un seul terme entre deux autres de même signe, on peut supposer au terme manquant le même signe qu'aux deux autres, ce qui donne deux permanences, ou le supposer de signe contraire, ce qui donne deux variations. Donc $v-v'$ ne sera pas nul.

Ainsi, dans l'un et l'autre cas, l'équation a toujours des racines imaginaires.

La même conclusion n'a plus lieu, si les termes qui comprennent le terme manquant sont de signes contraires, puisqu'en donnant à celui-ci le signe + ou le signe —, on a toujours le même nombre de variations et de permanences.

En outre, la différence ci-dessus $v-v'$ est toujours un nombre pair. En effet, si, au lieu d'effectuer à la fois tous les changements de signes nécessaires pour passer du cas où le nombre de variations est le *maximum* v à celui où il est le *minimum* v', on change les signes l'un après l'autre, il est évi-

dent que chaque fois que le signe changé se trouve entre des signes contraires, le nombre des variations reste le même, et que, s'il est entre deux signes semblables, deux variations sont remplacées par deux permanences, ou réciproquement; de sorte qu'après tous les changements de signes, $v - v'$ sera toujours un nombre pair.

6° Le théorème de Descartes, auquel on donne habituellement le nom de *règle des signes*, fournit aussi les conditions de la réalité des racines, mais au nombre beaucoup trop fort de

$$\frac{1}{2}m(m-1).$$

En effet, lorsque toutes les racines d'une équation sont réelles, l'équation aux carrés des différences a toutes ses racines réelles et positives; elle doit donc être complète et n'avoir que des variations de signes.

Réciproquement, si ces deux conditions sont satisfaites dans l'équation aux carrés des différences, la proposée a toutes ses racines réelles. Car si elle avait des racines imaginaires, elle en aurait au moins (292) deux de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$; or le carré de leur différence étant $-4\beta^2$, quantité essentiellement négative, l'équation aux carrés des différences aurait alors une racine négative, et par conséquent devrait offrir au moins une permanence, ce qui est contre l'hypothèse.

Donc, *pour qu'une équation n'ait que des racines réelles, il faut et il suffit que l'équation aux carrés des différences soit complète et n'ait que des variations.*

Cette dernière équation étant du degré $\frac{1}{2}m(m-1)$, c'est le nombre des conditions de la réalité des racines de l'équation proposée.

393. Depuis longtemps on s'efforçait de trouver un théorème qui donnât la séparation des racines sans recourir à l'équation aux carrés des différences.

Fourier développa, en 1796, dans son cours à l'École Polytechnique, un théorème donnant, au moyen des dérivées successives d'une équation, une limite du nombre de racines réelles

comprises entre deux nombres donnés. En 1803, M. Budan communiqua à l'Institut un théorème analogue, qu'il publia en 1807 dans sa *Nouvelle méthode pour la résolution des équations*, et dont il compléta la démonstration dans un mémoire présenté à l'Institut en 1811. Malheureusement le théorème n'est pas applicable dans tous les cas, et n'offre guère d'autre avantage que de restreindre considérablement le nombre des substitutions qu'on aurait à faire d'après la méthode de Lagrange. En 1827, Fourier énonça dans les mémoires de l'Institut, mais sans aucune preuve à l'appui, qu'on pouvait calculer *à priori* toutes les racines en fractions continues, comme si l'on était certain de leur réalité, et que l'opération ferait reconnaître les racines réelles et les racines imaginaires. M. Vincent a démontré cette proposition en 1834 dans les mémoires de Lille. Les travaux de Fourier sur la résolution des équations furent publiés en 1831, après sa mort, par M. Navier, sous le titre d'*Analyse des équations*. Le théorème, tel qu'il y est présenté, contient celui de Descartes comme cas particulier.

Au reste, M. Sturm avait déjà découvert son beau théorème qu'il communiqua à l'Institut en 1829. Vers la même époque, M. Sarrus y présenta également un théorème très-complet, et même applicable aux équations transcendantes, qu'il publia en 1833 dans une brochure intitulée *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques*. Ce théorème donne les moyens de résoudre, par de simples substitutions de nombres, les deux questions suivantes :

1° Trouver toutes les racines réelles d'une équation donnée qui peuvent être comprises entre deux nombres donnés, et déterminer le degré de multiplicité de chacune d'elles?

2° Trouver toutes les racines réelles communes à plusieurs équations données, et comprises entre deux nombres donnés; déterminer le degré de multiplicité de chacune d'elles dans une quelconque des équations données?

394. Nous terminerons par exposer la propriété, connue depuis longtemps, qu'ont les racines réelles de l'équation dérivée, de servir de limites aux racines réelles d'une équation

donnée, ce qui constitue le théorème de Rolle; on peut le démontrer directement, mais, pour plus de simplicité, nous le déduirons de celui de M. Sturm.

Théorème de Rolle. *Étant donnée une équation* $X=0$ *qui n'a plus de racines égales, si l'on dispose, par ordre de grandeur, les racines réelles* α, β, $\gamma \ldots \lambda$ *de la dérivée* $X_1=0$, *en commençant par la plus grande, l'équation* $X=0$ *ne peut avoir qu'une seule racine réelle au-dessus de* α, *une seule entre* α *et* β, *ainsi de suite, et enfin une seule au-dessous de* λ.

En effet, soient a, b, $c, \ldots l$ les racines réelles de $X=0$, rangées de même par ordre décroissant de grandeur. D'après le théorème de M. Sturm, chaque fois que x, croissant d'une manière continue, vient à dépasser une racine b de l'équation $X=0$, les fonctions X et X_1 sont toujours de signes contraires pour une valeur de x un peu moindre que b, et de même signe pour une valeur un peu plus grande que b. En outre, X ne change pas de signe dans l'intervalle de deux racines consécutives b et a, donc X_1 en change au moins une fois, et par conséquent l'équation $X_1=0$ a au moins une racine réelle comprise entre b et a.

En raisonnant de même sur les autres racines b, $c, \ldots l$, on voit que l'équation $X_1=0$ a ses racines réelles comprises, partie entre a et b, partie entre b et c, etc., et même il peut arriver qu'il y en ait au-dessus de a et au-dessous de l. D'où il résulte que si l'on représente par α, β, $\gamma \ldots \lambda$ les racines réelles de l'équation $X_1=0$, rangées par ordre décroissant de grandeur, l'équation $X=0$ ne peut avoir qu'une seule racine réelle au-dessus de α, une seule entre α et β, une seule entre β et γ, ainsi de suite, enfin une seule au-dessous de λ.

395. Ce théorème apprend que *deux racines consécutives de la dérivée ne peuvent comprendre plus d'une racine de la proposée,* mais non qu'elles doivent nécessairement en comprendre une.

On conclut de là que le nombre des racines réelles d'une équation, comprises entre deux nombres n et n', ne peut surpasser de plus d'une unité celui des racines de la dérivée comprises entre n et n'. Ainsi la proposée ne peut jamais avoir

qu'une racine réelle de plus que la dérivée, mais elle peut d'ailleurs en avoir moins.

Le même théorème peut également s'appliquer au cas où l'équation proposée a des racines égales, en supposant que plusieurs racines consécutives se rapprochent peu à peu jusqu'à l'égalité. Dans ce cas, chaque racine de la dérivée, comprise entre deux racines qui deviennent égales, doit elle-même être égale à ces racines.

Il est à remarquer que le théorème de Rolle donne exactement, comme l'équation aux carrés des différences, un nombre $\frac{m(m-1)}{2}$ de conditions pour la réalité des racines. Il peut s'appliquer aux équations transcendantes, mais non celui de M. Sturm.

SECTION III.

APPROXIMATION DES RACINES.

---

§ 1er. *Méthodes des limites, de Newton et de Lagrange.*

Méthode des limites.

396. Nous avons vu qu'au moyen du théorème de M. Sturm on peut, pour chaque racine réelle d'une équation donnée, assigner deux nombres α et β qui la comprennent seule. Il s'agit maintenant de montrer comment on peut la calculer avec telle approximation qu'on voudra.

Le moyen le plus naturel est de substituer successivement dans l'équation des nombres compris entre α et β. Si l'on

substitue d'abord un nombre intermédiaire γ, on verra par le signe du résultat si la racine est comprise entre α et γ ou entre γ et β. Supposons-la entre α et γ, en substituant un nombre δ compris entre α et γ, on verra de même si la racine est entre α et δ ou entre δ et γ; de sorte qu'en continuant ainsi, on obtiendra deux limites dont la différence sera moindre qu'une quantité donnée λ; et chacune d'elles sera la valeur approchée de la racine à moins de la quantité λ. Mais comme ce procédé nécessiterait de longs calculs, on l'emploie seulement pour se procurer d'abord une valeur approchée à un certain degré, comme, par exemple, à $\frac{1}{10}$ près. Alors on obtient rapidement une grande approximation par la méthode suivante, due à Newton.

Méthode de Newton.

397. Cette méthode exige qu'on ait préalablement une certaine approximation de la racine, qu'on suppose, pour plus de facilité, obtenue à moins d'un dixième.

Soit l'équation $X=0$, et a la valeur d'une racine à moins de $\frac{1}{10}$. Représentons par $A, A', A'', A''' \ldots$, les valeurs que prennent, pour $x=a$, le polynôme X et ses dérivés $X', X'', X''' \ldots$; si dans l'équation $X=0$ on fait $x=a+y$, on aura (310) la transformée

$$A+A'y+\frac{1}{2}A''y^2+\frac{1}{2.3}A'''y^3\ldots=0,$$

d'où
$$y=-\frac{A}{A'}-\frac{A''y^2}{2A'}-\frac{A'''y^3}{2.3A'}-\text{etc.}$$

La valeur qu'on veut trouver pour y devant être $<\frac{1}{10}$, y^2 sera $<\frac{1}{100}$, y^3 sera $<\frac{1}{1000}$, etc. Si donc on admet que l'ensemble des termes qui contiennent ces puissances de y soit $<\frac{1}{100}$, il sera permis de les négliger, et alors la valeur de y,

approchée à moins d'un centième, sera donnée par l'équation

$$y = -\frac{A}{A'},$$

où l'on poussera jusqu'aux centièmes la division indiquée. La somme du quotient et de la quantité a donnera un résultat b, qu'on regardera comme la racine approchée à moins de $\frac{1}{100}$.

Si maintenant l'on opère sur b comme on l'a fait sur a, et qu'on représente par B, B',... les résultats de la substitution de $x = b$ dans X, X'..., la substitution de $b + y'$ au lieu de x, dans l'équation proposée, donnera une transformée semblable à la première, d'où l'on déduira

$$y' = -\frac{B}{B'},$$

en admettant que la partie négligée soit $< \left(\frac{1}{100}\right)^2$, comme le sont en effet y'^2, y'^3,... Alors la valeur de y', approchée à moins de $\left(\frac{1}{100}\right)^2$, sera donnée par l'équation précédente, où l'on poussera donc la division jusqu'à la quatrième décimale. La somme du quotient et de la quantité b donnera un résultat c, qu'on regardera comme la racine approchée à moins de $\frac{1}{10000}$.

Si l'on opère de même sur la quantité c, on obtiendra un nouveau résultat qu'on regardera comme la racine approchée à moins d'une unité du huitième ordre, et ainsi de suite. De sorte que chaque opération donnant toujours un nombre de décimales double du précédent, on aura facilement telle approximation qu'on voudra, en n'employant que la seule formule

$$y = -\frac{X}{X'},$$

qui fournit toutes les approximations successives, en y faisant 1° $x = a$, et calculant le quotient jusqu'aux centièmes, ce qui donne $x = b$; 2° $x = b$, et calculant le quotient jusqu'aux dix-millièmes, ce qui donne $x = c$; 3° $x = c$, et calculant le quotient jusqu'à la huitième décimale, etc.

Tout ce qui précède suppose qu'on peut négliger, dans l'expression générale de y, l'ensemble des termes qui contiennent les puissances de y supérieures à la première.

Ainsi, pour calculer b, $c\dots$, nous avons admis que cet ensemble était $<\frac{1}{100}$, $<\left(\frac{1}{100}\right)^2\dots$ Or il peut arriver qu'il soit $>\frac{1}{100}$, ou $>\left(\frac{1}{100}\right)^2\dots$, et alors les valeurs correspondantes b, $c\dots$, sont inexactes. C'est pourquoi il est nécessaire de vérifier chacune d'elles à mesure qu'on l'obtient.

Pour vérifier si la première valeur b est réellement approchée à moins de $\frac{1}{100}$, on substitue dans X la valeur $x=b$, et en comparant le signe du résultat aux signes des substitutions qui ont donné pour point de départ $x=a$, on voit si la racine doit être $>$ ou $<b$, et alors, selon le cas, on substitue $x=b-\frac{1}{100}$ ou $x=b+\frac{1}{100}$. Si le résultat de cette substitution a un signe contraire à celui de la substitution $x=b$, on peut être certain que la valeur b est approchée à moins de $\frac{1}{100}$. Mais si les deux résultats sont de même signe, on en conclut que la valeur b pèche par excès ou par défaut. Alors on ne peut employer la méthode de Newton qu'en prenant pour point de départ une valeur plus approchée, par exemple, à un demi-dixième, et qu'on obtient par le resserrement des limites (396). On vérifie de même la nouvelle valeur qui en résulte, et si elle n'était pas exacte à $\frac{1}{100}$ près, on rapprocherait encore les limites; ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait deux décimales exactes.

On vérifie de même la valeur c, en substituant $x=c$, puis $x=c-\frac{1}{10000}$, ou bien $x=c+\frac{1}{10000}$. Si la quatrième décimale est inexacte, on la supprime, et l'on vérifie les trois premières. Si elles sont exactes, on s'en sert pour obtenir une

nouvelle valeur ayant six décimales, qu'on vérifie de même; ainsi de suite.

L'habitude du calcul fait ordinairement reconnaître, sans vérification, si quelque valeur intermédiaire pèche par excès ou par défaut. Lors donc que les opérations ne présentent aucune contradiction jusqu'à ce qu'on obtienne l'approximation cherchée, il suffit de vérifier cette dernière valeur.

On pourrait aussi, par cette méthode, trouver les racines commensurables, si on ne les avait pas supprimées dans l'équation. Elles seraient alors exprimées par des fractions décimales terminées ou périodiques. Mais si la fraction devait être périodique, on ne pourrait s'en assurer qu'en substituant dans l'équation la fraction ordinaire équivalente à la fraction périodique.

Méthode de Lagrange.

398. La méthode de Lagrange consiste à exprimer chaque racine incommensurable en fraction continue. Elle est loin d'être aussi simple que celle de Newton, mais au moins elle n'offre aucune incertitude.

Soient a et $a+1$ deux nombres entiers consécutifs comprenant une seule racine réelle et positive de l'équation $X=0$. Si l'on y fait $x=a+\frac{1}{y}$, et qu'on nomme $Y=0$ la transformée en y, qui sera de même degré que $X=0$, on voit qu'elle aura nécessairement une racine positive et >1. Mais elle n'aura qu'une telle racine; car si elle en avait plusieurs, on en conclurait qu'il y a plusieurs valeurs de x comprises entre les nombres a et $a+1$. D'après cela, si l'on substitue dans $Y=0$ les nombres entiers $1, 2, 3, \ldots$, on est certain de parvenir à deux nombres consécutifs b et $b+1$ qui donneront des résultats de signes contraires, et comprendront ainsi la valeur cherchée de y. La partie entière de cette valeur est évidemment égale à b.

Si l'on opère sur b de la même manière que sur a, et qu'on

fasse $y = b + \frac{1}{z}$ dans $Y = 0$, la nouvelle transformée $Z = 0$ aura pareillement une seule racine positive > 1, dont on déterminera la partie entière c par la substitution des nombres 1, 2, 3,....

Si l'on fait de même $z = c + \frac{1}{u}$ dans $Z = 0$, et ainsi de suite, en remontant alors de proche en proche jusqu'à $x = a + \frac{1}{y}$, on aura la valeur de x exprimée par une fraction continue

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + 1 \text{ etc.}}}$$

Il est bon de former (222) les réduites à mesure qu'on pousse l'opération, afin de pouvoir l'arrêter dès qu'on en aura deux consécutives donnant une différence moindre que l'approximation cherchée (224).

399. Lorsque, dans le cours de l'opération, on est conduit à une transformée identique avec la précédente, la fraction continue, qui donne la valeur cherchée, est nécessairement périodique. Mais lorsque toutes les transformées sont différentes, comme il peut néanmoins arriver que les mêmes quotients incomplets se reproduisent dans le même ordre, il faut vérifier si la fraction continue est réellement périodique. A cet effet, on forme l'équation du second degré, qui, dans ce cas (226), doit donner sa valeur, laquelle est alors de la forme $a + \sqrt{b}$; et comme l'équation proposée, en supposant ses coefficients rationnels, ne peut avoir la racine $a + \sqrt{b}$ sans admettre encore la racine $a - \sqrt{b}$, il en résulte que le premier membre de la proposée doit être exactement divisible par le premier membre de cette équation du second degré. Donc, si la division indiquée se fait exactement, la fraction continue est réellement périodique, et la proposée peut en outre se ramener à une équation d'un degré moindre de deux unités.

400. On facilite le calcul des transformées successives en y, z..., par la considération des polynômes dérivés (310). D'a-

bord lorsqu'on fait $x=a+\frac{1}{y}$ dans la proposée $X=0$ du degré m, en représentant (comme au n° 397) par $A, A', A'', \ldots$ les valeurs que prennent pour $x=a$ le polynôme X et ses dérivés $X', X'', \ldots$ on a la transformée

$$A+A'\frac{1}{y}+\frac{A''}{2}\frac{1}{y^2}+\frac{A'''}{2.3}\frac{1}{y^3}+\ldots=0;$$

et en multipliant tous les termes par y^m pour faire disparaître les dénominateurs, il vient

$$Ay^m+A'y^{m-1}+\frac{A''}{2}y^{m-2}+\frac{A'''}{2.3}y^{m-3}+\ldots=0.$$

La loi des coefficients étant évidente, si l'on représente par $B, B', B''\ldots$, les valeurs que prennent, pour $y=b$, les polynômes $Y, Y', Y'', \ldots$, on a immédiatement, pour la seconde transformée, l'équation

$$Bz^m+B'z^{m-1}+\frac{B''}{2}z^{m-2}+\frac{B'''}{2.3}z^{m-3}+\ldots=0,$$

et l'on obtient de même toutes les autres.

401. *Remarque* I. Lorsque deux entiers consécutifs a et $a+1$ comprennent plusieurs racines, on ne peut appliquer cette méthode qu'après avoir transformé l'équation proposée en une autre, dont les racines soient celles de la proposée multipliées par un nombre tel que la partie entière des racines de la transformée soit différente. Cependant on peut éviter le calcul de la transformée dans certains cas, comme lorsque deux nombres consécutifs comprennent deux racines qui ne sont pas extrêmement rapprochées.

402. *Remarque* II. Le théorème de M. Sturm donne le moyen de calculer, sans faire aucune transformation, toutes les racines qui ont la même partie entière.

Soient a et $a+1$ deux entiers consécutifs comprenant plusieurs racines de $X=0$, on fera $x=a+\frac{1}{y}$ dans toutes les fonctions $X, X_1, X_2, \ldots$ en ayant soin de s'arrêter à la première d'entre elles qui conserve le même signe pour toutes les valeurs de x. Alors on déterminera la partie entière des

valeurs de y qui sont > 1, en substituant dans la suite $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ les nombres entiers consécutifs. En effet, les résultats fournis par les substitutions $y = b$ et $y = b + 1$ dans la suite des fonctions en y, sont évidemment les mêmes qu'on obtiendrait en substituant $x = a + \frac{1}{b}$ et $x = a + \frac{1}{b+1}$ dans la suite $X, X_1, X_2, \ldots$ Donc la différence entre les deux nombres de variations égale le nombre de racines de $X = 0$ comprises entre les valeurs $a + \frac{1}{b}$ et $a + \frac{1}{b+1}$ qui correspondent aux valeurs de y comprises entre b et $b + 1$.

Si b et $b + 1$ comprennent plusieurs valeurs de y, on fera $y = b + \frac{1}{z}$ dans les fonctions en y, et l'on déterminera la partie entière des valeurs de z qui sont > 1, en substituant dans les fonctions en z les nombres entiers consécutifs; ainsi de suite.

On rend le calcul plus simple en réduisant, dans chacune des fonctions en $y, z, \ldots$, tous les termes au même dénominateur, qu'on supprime ensuite, pourvu qu'il soit positif.

Lorsqu'une des inconnues $y, z \ldots$, n'a qu'une seule valeur comprise entre deux entiers consécutifs, on n'a besoin de considérer, pour cette inconnue, que la seule transformée déduite de la fonction X. Si c'est la valeur de x qui n'a qu'une seule valeur comprise entre deux entiers consécutifs, il est évident que le procédé rentre identiquement dans la méthode de Lagrange.

§ 2. *Applications numériques.*

403. Prenons, pour exemples, les équations déjà traitées dans le n° 388.

EXEMPLE I. Soit l'équation

$$x^3 - 5x - 6 = 0$$

ayant une seule racine réelle qui est comprise entre 2 et 3.

Si l'on emploie d'abord la méthode des limites (392), on trouve que les substitutions $x = 2,5$ et $x = 3$ donnent des

résultats, l'un négatif, l'autre positif. Donc la racine est comprise entre 2,5 et 3. En substituant $x=2,7$, on a un résultat positif; ainsi la racine est entre les nombres 2,5, 2,7, et par conséquent égale 2,6 à moins de $\frac{1}{10}$.

1° Proposons-nous d'obtenir une plus grande approximation par la méthode de Newton (397).

On a $\quad X=x^3-5x-6,\ X_1=3x^2-5.$

Ainsi toutes les approximations seront données par la formule

$$(1) \qquad y=-\frac{x^3-5x-6}{3x^2-5}.$$

En faisant $x=2,6$, on a

$$y=\frac{1,424}{15,28}=0,09;$$

donc la valeur de x, approchée à moins de $\frac{1}{100}$, est

$$x=2,6+0,09=2,69.$$

Pour vérifier si le chiffre des centièmes est exact, on substitue dans la proposée $x=2,69$, ce qui donne un résultat positif; or, la valeur $x=2,6$ a donné un résultat négatif. Donc la racine est comprise entre 2,6 et 2,69. Faisant alors $x=2,69-0,01$ ou 2,68, on trouve un résultat négatif; ainsi la racine est comprise entre 2,68 et 2,69. Le chiffre exact des centièmes est donc 8.

Pour avoir une plus grande approximation, on fait $x=2,68$ dans la formule (1), et l'on trouve

$$y=\frac{0,151268}{16,5472}=+0,0091.$$

Donc la nouvelle valeur approchée de x est

$$x=2,68+0,0091=2,6891.$$

Pour la vérifier, on fait d'abord, dans la proposée, la substitution $x=2,6891$. Le résultat $+0,000078065971$ montre que la racine est comprise entre 2,68 et 2,6891. Substituant encore $x=2,6891-0,0001$ ou 2,6890, le résultat $-0,001588231$

montre que la racine est entre 2,6890 et 2,6891. Ainsi le chiffre exact des dix-millièmes est 0. En continuant de même, on pourra pousser l'approximation aussi loin qu'on le voudra.

2° Appliquons maintenant la méthode de Lagrange à la recherche de la même racine, sachant qu'elle est seule comprise entre 2 et 3. On doit faire $x=2+\frac{1}{y}$, et chercher la transformée en y, qui est (400) de la forme

$$Ay^3+A'y^2+\frac{A''}{2}y+\frac{A'''}{2.3}=0;$$

or on a

$$X=x^3-5x-6,\ X'=3x^2-5,\ \frac{1}{2}X''=3x,\ \frac{1}{2.3}X'''=1;$$

donc

$$A=2^3-5.2-6=-8,$$
$$A'=3.2^2-5=7,$$
$$\frac{1}{2}A''=3.2=6,$$
$$\frac{1}{2.3}A'''=1,$$

1re transformée, $8y^3-7y^2-6y-1=0$.

On voit aisément que le premier membre donne un résultat négatif pour $y=1$, et positif pour $y=2$. Donc la valeur de y est comprise entre 1 et 2, et il faut faire $y=1+\frac{1}{z}$. Voici le calcul de la seconde transformée :

$$B=8.1^3-7.1^2-6.1=-6,$$
$$B'=24.1^2-14.1-6=4,$$
$$\frac{1}{2}B''=24.1-7=17,$$
$$\frac{1}{2.3}B'''=8,$$

2e transformée, $6z^3-4z^2-17z-8=0$.

On trouve que $z=2$ donne un résultat négatif, et $z=3$ un résultat positif. Donc la valeur de z est comprise entre 2 et 3;

et il faut poser $z=2+\frac{1}{u}$. Voici le calcul de la troisième transformée :

$$C = 6.2^3-4.2^2-17.2-8=-10,$$
$$C' = 18.2^2-8.2-17=39,$$
$$\frac{1}{2}C''=18.2-4=32,$$
$$\frac{1}{2.3}C'''=6,$$

3e transformée, $10u^3-39u^2-32u-6=0$.

On trouve que $u=4$ donne un résultat négatif, et $u=5$ un résultat positif. Donc la valeur de u est comprise entre 4 et 5, et il faut poser $u=4+\frac{1}{t}$. Le calcul donne

4e transformée, $118t^3-36t^2-81t-10=0$.

Les substitutions $t=1$ et $t=2$ donnant des résultats l'un positif, l'autre négatif, la valeur de t est comprise entre 1 et 2; et si l'on voulait aller plus loin, il faudrait poser $t=1+\frac{1}{s}$. En se bornant aux valeurs précédentes, on a

$$x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}$$

Les réduites de cette fraction continue sont (222)

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{8}{3},\ \frac{35}{13},\ \frac{43}{16}.$$

Si l'on remarque que le dénominateur de la réduite suivante est au moins égal à 29, et que l'on calcule, d'après la règle donnée plus haut (224), l'erreur que l'on commet en prenant une des réduites pour la valeur de x, on trouve les résultats suivants :

$x = \frac{2}{1}$, erreur en moins et $< \frac{1}{1.1}$ ou 1

$x = \frac{3}{1}$, erreur en plus et $< \frac{1}{1.3}$ ou $\frac{1}{3}$

$x = \frac{8}{3}$, erreur en moins et $< \frac{1}{3.13}$ ou $\frac{1}{39}$

$x = \frac{35}{13}$, erreur en plus et $< \frac{1}{13.16}$ ou $\frac{1}{208}$

$x = \frac{43}{16}$, erreur en moins et $< \frac{1}{16.29}$ ou $\frac{1}{464}$.

Si l'on réduit en décimales la dernière valeur $x = \frac{43}{16}$, on trouve $x = 2{,}6875$. La valeur $\frac{43}{16}$ étant trop faible et approchée à moins de $\frac{1}{464}$ ou à peu près $0{,}002$, en faisant cette correction, on trouve $x = 2{,}6895$, dont les trois premières décimales sont exactes, comme on l'a vu par la méthode de Newton.

404. Exemple II. Soit l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

On sait (388) qu'elle a toutes ses racines réelles, deux positives et une négative. Les deux positives sont comprises l'une entre 1 et 1,5, l'autre entre 1,5 et 2; la négative est entre — 3 et — 4.

Si l'on veut d'abord obtenir la première racine à $\frac{1}{10}$ près, il faut resserrer ses limites (396). Or la substitution $x = 1{,}4$ donne un résultat négatif, tandis que $x = 1{,}5$ en donne un positif. Donc la racine est entre 1,4 et 1,5, et par conséquent égale 1,4 à $\frac{1}{10}$ près.

1° Pour obtenir une plus grande approximation par la méthode de Newton, on prend (397) la formule

$$y = \frac{X}{X'},$$

qui devient ici

$$(1) \qquad y = -\frac{x^3 - 7x + 7}{3x^2 - 7}.$$

En faisant $x = 1,4$, on trouve $y = -0,05$, et par suite $x = 1,35$.

En faisant dans la même formule $x = 1,35$, on trouve

$$y = 0,0068, \text{ et par suite } x = 1,3568.$$

Pour vérifier cette valeur, on fait, dans l'équation proposée,

d'abord $x = 1,3568$, ce qui donne $+0,00014158643 2$,

puis $x = 1,3569$, ce qui donne $-0,000006100991$.

Les résultats étant de signes contraires, on voit que la racine est entre les nombres substitués, et que par conséquent tous les chiffres du premier sont exacts. On pourra pousser l'approximation tant qu'on voudra.

On trouvera de même que la seconde racine positive est $x = 1,6920$. Pour vérifier cette valeur, on fait, dans l'équation proposée,

d'abord $x = 1,6920$, ce qui donne $-0,000034112000$,

puis $x = 1,6921$, ce qui donne $+0,000124797961$;

d'où il suit que les quatre décimales de la première valeur sont exactes.

Quant à la racine négative, qui est entre -3 et -4, on l'obtiendrait en changeant x en $-x$ dans la proposée, et en donnant le signe $-$ à la racine positive qu'on trouverait entre 3 et 4 pour la transformée. Mais comme l'équation proposée n'a pas de second terme, il en résulte que la somme des racines est nulle, et que par conséquent la racine négative est égale, en valeur absolue, à la somme des deux positives. Cette racine est donc

$$x = -3,0488.$$

2° Pour calculer, par la méthode de Lagrange, les mêmes racines positives, qui sont comprises, l'une entre 1 et $\frac{3}{2}$, l'autre entre $\frac{3}{2}$ et 2, on doit d'abord (401) changer la proposée en une

autre dont les racines positives aient une partie entière différente. Or si l'on fait $x=\frac{x'}{2}$, il est clair que la transformée

$$x'^3 - 28x' + 56 = 0$$

doit avoir deux racines positives; l'une entre 2 et 3 et l'autre entre 3 et 4.

En appliquant à cette équation la marche suivie dans le premier exemple, on trouve pour les racines positives les fractions continues

$$x' = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{40 + \text{etc.}}}}} \qquad x' = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \text{etc.}}}}}}}$$

Les réduites de la première sont

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{8}{3},\ \frac{19}{7},\ \frac{768}{283},$$

dont la cinquième donne une erreur en moins et $< \frac{1}{283.290}$ ou $\frac{1}{82070}$. Cette réduite revient à 2,7137 dont les quatre décimales sont exactes.

Les réduites de la seconde fraction sont

$$\frac{3}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{17}{5},\ \frac{27}{8},\ \frac{44}{13},\ \frac{423}{125},$$

dont la septième donne une erreur en moins et $< \frac{1}{125.138}$ ou $\frac{1}{17250}$. Cette réduite revient exactement à 3,3840.

Ces deux racines de la transformée, étant divisées par 2, donneront pour celles de la proposée

$$x = 1,3568,\ x = 1,6920,$$

dont toutes les décimales sont exactes, comme on l'a vu plus haut (1°).

Quant à la racine négative, on a $x = -(1,3568 + 1,6920) = -3,0488$.

Remarque. D'après l'observation qui termine le n° 401, on pourrait ici se dispenser de calculer la transformée en x'. Car les deux racines positives étant comprises l'une entre 1 et $\frac{3}{2}$, l'autre entre $\frac{3}{2}$ et 2, si l'on fait $x = 1 + \frac{1}{y}$, l'inconnue y aura nécessairement deux valeurs positives, l'une entre 1 et 2; l'autre plus grande que 2, et n'en aura pas davantage.

Par cette substitution on obtient la transformée en y

$$y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0,$$

qui, pour $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, donne respectivement un résultat positif, un négatif, un positif; d'où il suit que les deux racines positives de la transformée ont 1 et 2 pour parties entières. Par conséquent si l'on pose $y = 1 + \frac{1}{z}$, et $y = 2 + \frac{1}{z}$, on aura deux transformées en z qui n'auront chacune qu'une seule racine positive et > 1. On pourra donc leur appliquer la méthode de Lagrange.

Remarque. Nous engageons le lecteur à calculer, d'après chaque méthode, les deux racines réelles de l'équation

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0$$

qui nous a servi de troisième exemple dans le n° 388.

Les deux racines sont positives, l'une entre 2 et 3, l'autre entre 3 et 4.

SECTION IV.

DES RACINES IMAGINAIRES.

---

§ 1er. *Recherche des racines imaginaires.*

405. Lorsqu'on veut résoudre une équation numérique, on peut toujours, à l'aide des méthodes précédentes, déterminer toutes ses racines réelles, tant commensurables qu'incommensurables. Si le nombre des racines réelles, que le théorème de M. Sturm donne d'ailleurs *à priori*, n'est pas égal au degré de l'équation, on est certain que celle-ci a des racines imaginaires en nombre égal à l'excès de son degré sur le nombre des racines réelles.

Il s'agit de trouver les racines imaginaires. Or on sait qu'elles sont toutes de la forme $a+b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles; ce sont donc ces quantités qu'il faut déterminer. A cet effet, on substitue, dans l'équation proposée, $a+b\sqrt{-1}$ au lieu de x, ce qui donne un résultat de la forme $A+B\sqrt{-1}=0$, A et B étant des quantités réelles, fonctions de a et de b. Cette équation ne pouvant subsister, à moins qu'on n'ait séparément

$$A=0,\quad B=0,$$

il est clair que si l'on applique à ces deux équations les procédés ordinaires de l'élimination, on déterminera tous les couples de valeurs de a et de b qui leur conviennent. Mais comme on ne cherche, pour ces inconnues, que des valeurs réelles, on devra rejeter toutes les solutions dans lesquelles les deux inconnues ou seulement l'une d'elles auraient des valeurs imaginaires.

En outre, si les coefficients de l'équation proposée sont réels, les racines imaginaires (292) seront en nombre pair, et donneront des couples de la forme $a\pm b\sqrt{-1}$.

406. Appliquons ce procédé à quelques exemples.

Exemple I. Soit l'équation $x^4-2x^3+5x^2-4x+6=0$.

Pour déterminer ses racines imaginaires, on substitue $a+b\sqrt{-1}$ au lieu de x, ce qui donne les deux équations

(1) $a^4-2a^3+(5-6b^2)a^2+(6b^2-4)a+(b^4-5b^2+6)=0$,

(2) $4ba^3-6ba^2+(10b-4b^3)a+(2b^3-4b)=0$.

La seconde a le facteur b, qu'on peut supprimer : car à $b=0$ correspondrait la racine réelle $x=a$, et l'on ne cherche que les racines imaginaires.

On divise donc la seconde équation par b, et l'on élimine a entre l'équation résultante et l'équation (1), ce qui donne pour l'équation finale en b

$$b^4-4b^2+4=0, \text{ ou } (b^2-2)^2=0;$$

or $$b^2-2=(b+\sqrt{2})(b-\sqrt{2}).$$

Donc on a $$b=-\sqrt{2} \text{ et } b=+\sqrt{2}.$$

Ces valeurs, étant substituées dans le reste qui précède l'équation finale, donnent $a=0$ et $a=-1$. Donc les quatre racines de l'équation proposée sont

$$x=+\sqrt{-2},\ x=-\sqrt{-2},\ x=-1+\sqrt{-2},\ x=-1-\sqrt{-2}.$$

Remarque. On voit que toutes les racines sont imaginaires, comme on pouvait d'ailleurs le reconnaître *à priori*, au moyen du théorème de M. Sturm, en formant (381) les fonctions $X_1, X_2, \ldots$

En effet, on a

$$\begin{aligned} X &= x^4-2x^3+5x^2-4x+6, \\ X_1 &= 4x^3-6x^2+10x-4, \\ X_2 &= -7x^2+7x-22, \\ X_3 &= 2x-1, \\ X_4 &= 8. \end{aligned}$$

Les fonctions auxiliaires X_1, X_2, X_3, X_4, étant en nombre égal au degré de l'équation proposée, et la suite des signes de leurs premiers termes offrant deux variations, il en résulte (386) que l'équation a ses quatre racines imaginaires.

Exemple II. Soit l'équation $x^4+4x^3+6x^2+4x+5=0$.

On trouvera par le même procédé que les racines sont

$$x=-2+\sqrt{-1},\ x=-2-\sqrt{-1},\ x=+\sqrt{-1},\ x=-\sqrt{-1}.$$

407. On peut aussi déterminer les racines imaginaires par la considération des facteurs du second degré. On sait (292) que chaque couple de racines imaginaires donne un facteur du second degré à coefficients réels, et de la forme $x^2-2ax+a^2-b^2$. Ce facteur devant diviser le premier membre, quel que soit x, en effectuant la division, l'on obtiendra (342) un reste de la forme $Ax+B$, qui, devant être nul, donnera les deux équations $A=0$, $B=0$, toutes deux fonctions de a et de b, et qui serviront à déterminer, par l'élimination, les couples de valeurs de a et de b rendant le diviseur ci-dessus facteur de l'équation proposée; d'où l'on déduira ses racines imaginaires.

Enfin on peut trouver ces facteurs du second degré par la méthode des coefficients indéterminés (343).

§ 2. *Recherche des limites des modules.*

408. Nous avons exposé (360) les procédés servant à trouver les limites des racines réelles d'une équation. En suivant une marche analogue, on peut également assigner des limites renfermant les modules de toutes les racines tant réelles qu'imaginaires.

Soit l'équation à coefficients réels ou imaginaires

$$x^m+Px^{m-1}+Q^{m-2}+\ldots=0.$$

Pour qu'une quantité, substituée au lieu de x, rende le premier membre égal à zéro, il faut que le module du résultat soit zéro (194).

Soient u le module de x, et p, q,.... ceux des coefficients P, Q..., les modules des termes de l'équation seront (196)

$$u^m,\ pu^{m-1},\ qu^{m-2},\ \ldots.$$

et le module de la somme des termes qui suivent le premier x^m ne pourra (195) surpasser la somme des modules de ces termes, c'est-à-dire, $pu^{m-1}+qu^{m-2}+\ldots.$

Donc, si l'on prend pour u une valeur λ satisfaisant à la relation

$$x^m-pu^{m-1}-qu^{m-2}-\ldots=0 \text{ ou } >0,$$

il est clair que le module du premier membre de la proposée

ne pourra pas être plus petit que la différence précédente. Donc ce module sera différent de zéro, et par suite la valeur correspondante de x ne sera point racine de l'équation. En outre, toute valeur de u plus grande que λ, satisfaisant à plus forte raison à la relation ci-dessus, il en résulte que λ est une limite supérieure des modules.

La valeur de λ se détermine aisément en substituant à u, dans la même relation, des valeurs positives et croissantes, jusqu'à ce qu'on trouve un résultat positif.

Lorsque les coefficients P, Q...., sont réels, leur valeur absolue, prise positivement, est leur module. Soit N la plus grande de ces valeurs, on pourra prendre $1+N$ pour limite supérieure. Quant à la limite inférieure, on l'obtient comme plus haut (364), en substituant $x=\frac{1}{y}$, et en déterminant une limite supérieure λ' des modules des racines de la transformée; $\frac{1}{\lambda'}$ sera la limite inférieure cherchée.

*APPENDICE.

*CHAPITRE IX.

FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

§ 1er. *Théorie des fonctions symétriques.*

409. On appelle *fonction symétrique* toute fonction de plusieurs quantités qui reste la même, lorsqu'on y change ces quantités les unes dans les autres. D'après cela, l'expression

$$a^2b^3 + b^2a^3 + a^2c^3 + c^2a^3 + b^2c^3 + c^2b^3$$

est une fonction symétrique des quantités a, b, c.

Lorsqu'une fonction symétrique est ainsi composée d'un nombre quelconque de lettres a, b, c,.... arrangées *deux à deux* de toutes les manières possibles, la première lettre de chaque arrangement ayant un exposant constant α, et la seconde lettre un exposant β, on dit que la fonction est *double*, parce que chaque terme renferme deux lettres a et b, et l'on représente la somme de tous les termes, c'est-à-dire la fonction elle-même, par $S(a^\alpha b^\beta)$, la lettre indicative S étant prise comme l'initiale du mot *somme*.

Si chaque terme contient trois, quatre,...., des lettres a, b, c, d,... la fonction est dite *triple, quadruple*, etc., et s'écrit $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$, $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta)$, etc. Lorsque chaque terme ne contient qu'une lettre, comme la fonction $a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha +$,... elle est dite *simple*, et s'écrit $S(a^\alpha)$ ou seulement S_α. Par opposition les autres fonctions sont dites *multiples*.

Quant aux fonctions symétriques fractionnaires, il n'y a pas lieu de les considérer, parce qu'on peut les réduire au même

dénominateur, ce qui donne, pour les deux termes, des fonctions symétriques entières.

La découverte de plusieurs théorèmes ayant bien diminué l'utilité des fonctions symétriques, nous exposerons seulement le théorème général d'où dépendent leurs principales propriétés, et nous nous bornerons à quelques applications.

410. THÉORÈME GÉNÉRAL. *Toute fonction algébrique symétrique et rationnelle des racines d'une équation peut s'exprimer rationnellement au moyen des coefficients de cette équation.*

Pour démontrer ce théorème, il faut faire voir qu'il a également lieu, lorsque les fonctions rationnelles sont simples ou multiples, ce qui donne lieu aux deux cas suivants :

Ier CAS. Considérons les fonctions simples ou sommes $S_1, S_2, \ldots$, des puissances semblables et entières des racines.

Soit l'équation

$$(1) \quad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + Tx + U = 0.$$

Désignons le premier membre par X et les racines par $a, b, c, d, \ldots$; on sait (282) que le quotient de X par $x - a$ est

$$\begin{array}{r|r|r}
x^{m-1} + a & x^{m-2} + a^2 & x^{m-3} \ldots + \quad a^{m-1} \\
+ P & + Pa & + Pa^{m-2} \\
 & + Q & + Qa^{m-3} \\
 & & \vdots \\
 & & + T
\end{array}$$

Pour avoir les quotients de X par chacun des autres facteurs $x - b$, $x - c, \ldots$ il suffit de remplacer successivement, dans le quotient ci-dessus, a par b, $c, \ldots$ Faisant la somme de ces m quotients, et mettant, d'après la notation indiquée, $S_1, S_2, \ldots$ au lieu des sommes $a + b + c \ldots$, $a^2 + b^2 + c^2 \ldots$, etc., il vient

$$\begin{array}{r|r|r}
mx^{m-1} + \; S_1 & x^{m-2} + S_2 & x^{m-3} \ldots + \quad S_{m-1} \\
+ mP & + PS_1 & + PS_{m-2} \\
 & + mQ & + QS_{m-3} \\
 & & \vdots \\
 & & + mT
\end{array}$$

Ce résultat devant être identique avec le polynôme dérivé X′ de X, lequel est

$$mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}\ldots+T,$$

si l'on compare les coefficients des mêmes puissances de x, on obtient, après la réduction, les $m-1$ relations suivantes:

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{l} S_1+P=0,\\ S_2+PS_1+2Q=0,\\ S_3+PS_2+QS_1+3R=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ S_{m-1}+PS_{m-2}+QS_{m-3}\ldots+(m-1)T=0. \end{array}\right.$$

Ces relations serviront à déterminer successivement, et de proche en proche, $S_1, S_2, S_3, \ldots S_{m-1}$. Pour avoir les sommes relatives aux exposants $>m-1$, on multiplie l'équation (1) par x^n, ce qui donne

$$x^{m+n}+Px^{m+n-1}+Qx^{m+n-2}\ldots+Tx^{n+1}+Ux^n=0.$$

Si alors on remplace x par chacune des racines $a, b, c,\ldots$ et qu'on ajoute les résultats, il vient

$$S_{m+n}+PS_{m+n-1}+QS_{m+n-2}\ldots+TS_{n+1}+US_n=0;$$

faisant successivement $n=0$, $n=1$, $n=2$,.... et remarquant, en outre, que $S_0=a_0+b_0+c_0\ldots=m$, on déterminera de proche en proche $S_m, S_{m+1},\ldots S_{m+n}$ au moyen des relations suivantes :

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{l} S_m+PS_{m-1}+QS_{m-2}\ldots+TS_1+US_0=0,\\ S_{m+1}+PS_m+QS_{m-1}\ldots+TS_2+US_1=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ S_{m+n}+PS_{m+n-1}+QS_{m+n-2}\ldots+TS_{n+1}+US_n=0. \end{array}\right.$$

Ce qui précède s'applique également aux puissances négatives des racines. Car si dans l'équation (1) on change x en $\frac{1}{x}$, et qu'on calcule, au moyen des formules (2) et (3), les sommes $S_1, S_2, S_3,\ldots$, relatives aux puissances positives des racines de la transformée, il est clair qu'on aura pour sommes celles qui seraient désignées par $S_{-1}, S_{-2}, S_{-3},\ldots$, pour les racines de la proposée.

IIe CAS. Considérons maintenant les fonctions multiples.

1° Pour déterminer d'abord la fonction double $S(a^\alpha b^\beta)$, on multiplie entre elles les deux sommes simples

$$S_\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha \ldots,$$
$$S_\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta \ldots,$$

ce qui donne le produit

$$S_\alpha S_\beta = a^{\alpha+\beta} + b^{\alpha+\beta} + c^{\alpha+\beta} \ldots$$
$$+ a^\alpha b^\beta + a^\alpha c^\beta + b^\alpha a^\beta \ldots$$

La première ligne est la somme des puissances $\alpha + \beta$ des racines, ou $S_{\alpha+\beta}$. La seconde ligne est la somme de tous les produits partiels formés en combinant la puissance α d'une racine avec la puissance β d'une autre. Cette somme est donc la fonction double $S(a^\alpha b^\beta)$. Ainsi l'on a

$$S_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta} + S(a^\alpha b^\beta),$$

d'où (4) $S(a^\alpha b^\beta) = S_\alpha S_\beta - S_{\alpha+\beta}$.

2° Pour déterminer la fonction triple $S(a^\alpha b^\beta b^\gamma)$, on multiplie entre elles les trois sommes

$$S_\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha \ldots,$$
$$S_\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta \ldots,$$
$$S_\gamma = a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma \ldots,$$

ou bien, d'après le 1°, on multiplie l'une par l'autre les deux quantités

$$S(a^\alpha b^\beta) = a^\alpha b^\beta + a^\alpha c^\beta + b^\alpha a^\beta \ldots$$
$$S_\gamma = a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma \ldots$$

Alors on voit que le produit total doit contenir les trois sortes de produits partiels suivants :

1° La somme des produits de deux lettres prises l'une avec l'exposant $\alpha + \gamma$, l'autre avec l'exposant β, laquelle somme est $S(a^{\alpha+\gamma} b^\beta)$; 2° la somme des produits de deux lettres prises avec les exposants $\beta + \gamma$ et α, c'est-à-dire, $S(a^{\beta+\gamma} b^\alpha)$; 3° la somme des produits de trois lettres prises avec chacun des exposants α, β, γ, c'est-à-dire, $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$. Donc

$$S(a^\alpha b^\beta) S_\gamma = S(a^{\alpha+\gamma} b^\beta) + S(a^{\beta+\gamma} b^\alpha) + S(a^\alpha b^\beta c^\gamma).$$

Ainsi, en remplaçant les fonctions doubles $S(a^\alpha b^\beta)$, $S(a^{\alpha+\gamma}b^\beta)$, $S(a^{\beta+\gamma}b^\alpha)$, par leurs valeurs déduites de la formule (4), on a pour les fonctions triples la formule

$$(5)\quad S(a^\alpha b^\beta c^\gamma)=S_\alpha S_\beta S_\gamma - S_{\alpha+\beta}S_\gamma - S_{\alpha+\gamma}S_\beta - S_{\beta+\gamma}S_\alpha + 2S_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

En suivant une marche analogue, on obtiendra les fonctions quadruples,... et en général multiples de la forme $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots)$.

En outre, il est clair que l'équation (1) ayant des entiers pour coefficients et l'unité pour celui du premier terme, les sommes S_1, S_2, S_3,.., et par conséquent $S(a^\alpha b^\beta)$, $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$,.., s'exprimeront, sans dénominateurs, en fonction des coefficients de l'équation proposée.

Maintenant toute fonction symétrique et entière étant nécessairement composée d'une suite d'expressions semblables aux précédentes, et toute fonction rationnelle pouvant se réduire à une seule fraction dont le numérateur et le dénominateur soient des fonctions symétriques entières, il en résulte que toute fonction symétrique comprise dans l'énoncé du théorème pourra s'exprimer par le même procédé. Ainsi le théorème se trouve démontré dans son entier.

Si l'on applique le premier cas du théorème à l'équation déjà traitée

$$x^3-7x+7=0,$$

on trouve $S_1=0$, $S_2=14$, $S_3=-21$, $S_4=98$.

411. *Remarque.* Lorsque plusieurs des exposants α, β,.... deviennent égaux, les formules précédentes doivent être modifiées.

Soit $\alpha=\beta$. Alors tous les termes dont se compose la fonction $S(a^\alpha b^\beta)$ deviennent égaux deux à deux. En effet, ces termes sont (410, 2e cas) tous les produits qu'on obtient en combinant la puissance α d'une racine avec la puissance β d'une autre, et sont par conséquent deux à deux de la forme $a^\alpha b^\beta$, $b^\alpha a^\beta$, qui, dans le cas de $\alpha=\beta$, égalent tous deux $a^\alpha b^\alpha$. Ainsi la formule (4) devient

$$S(a^\alpha b^\alpha)=\frac{1}{2}(S_\alpha^2-S_{2\alpha}).$$

De même, si dans la formule (5) on f termes de la fonction $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$ deviennent effet, ces termes sont tous les produits de avec chacun des exposants α, β, γ, et so trois à trois de la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, $b^\alpha a^\beta c^\gamma$, $c^\alpha b^\beta a$ de $\alpha = \beta = \gamma$, égalent tous trois $a^\alpha b^\alpha c^\alpha$. Ain devient

$$S(a^\alpha b^\alpha c^\alpha) = \frac{1}{6}(S_\alpha{}^3 - 3S_{2\alpha}S_\alpha + 2$$

§ 2. *Applications à l'équation aux carrés d l'élimination et au degré de l'équatio*

412. La théorie des fonctions symétriques transformation des équations, pourvu toutefo de la transformée ne puissent être que des nelles des racines de l'équation donnée.

La marche générale consiste à déterminer d de la transformée, puis les sommes des puissa de ses racines, d'où l'on déduit les coefficie voit que ces différentes sommes doivent êt symétriques des racines de la proposée, e peuvent s'exprimer au moyen de ses coeffici

413. APPLICATION I. *Trouver l'équation sont les carrés des différences de celles d'une*

Soit l'équation donnée

$$(1) \qquad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + U =$$

L'équation cherchée sera de la forme

$$(2) \qquad z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} \ldots + u = 0,$$

dont il faut déterminer le degré et les coeffi

Représentons par S_1, S_2, S_3,.., les somm semblables des m racines a, b, c,.., de l'équ par s_1, s_2, s_3,.., les sommes des puissances racines $(a-b)^2$, $(a-c)^2$, $(b-c)^2$,.., de l'é D'abord il est évident que le nombre n de ce est égal au nombre des combinaisons qu'on

m premières prises deux à deux. Donc le degré de l'équation cherchée est $n = \frac{1}{2} m(m-1)$.

Maintenant on sait (410, 1°) exprimer $S_1, S_2, S_3, \ldots$, en fonction des coefficients connus de l'équation (1), et de même $s_1, s_2, s_3 \ldots$, en fonction des coefficients inconnus de l'équation (2). La question se réduit donc à trouver des relations entre $S_1, S_2, S_3 \ldots$, et $s_1, s_2, s_3 \ldots$; d'où l'on déduira les coefficients de l'équation (2) en fonction de ceux de l'équation (1).

Élevons à une puissance entière et positive α les racines $(a-b)^2, (a-c)^2 \ldots$, nous aurons

$$s_\alpha = (a-b)^{2\alpha} + (a-c)^{2\alpha} + (b-c)^{2\alpha} + \ldots .$$

Ce qu'il y a de plus simple pour obtenir cette somme est de prendre l'expression

$$\varphi(x) = (x-a)^{2\alpha} + (x-b)^{2\alpha} + (x-c)^{2\alpha} + \text{etc.}$$

où l'on fera successivement $x=a$, $x=b$, $x=c \ldots$, et d'ajouter les m résultats. Or, 2α étant un nombre pair, on a

$$(a-b)^{2\alpha} = (b-a)^{2\alpha}, \ldots;$$

donc $$2s_\alpha = \varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(b) + \ldots .$$

Mais si on développe les puissances 2α des m binômes $(x-a)^{2\alpha} \ldots$, dont $\varphi(x)$ est composé, on a

$$\varphi(x) = \left\{ \begin{array}{l} x^{2\alpha} - 2\alpha a x^{2\alpha-1} + \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{1.2} a^2 x^{2\alpha-2} \ldots + a^{2\alpha} \\ + x^{2\alpha} - 2\alpha b x^{2\alpha-1} + \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{1.2} b^2 x^{2\alpha-2} \ldots + b^{2\alpha} \end{array} \right\}$$

$$= mx^{2\alpha} - 2\alpha S_1 x^{2\alpha-1} + \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{1.2} S_2 x^{2\alpha-2} \ldots + S_{2\alpha};$$

et en faisant successivement $x=a$, $x=b, \ldots$, on trouve pour la somme des résultats

$$2s_\alpha = mS_{2\alpha} - 2\alpha S_1 S_{2\alpha-1} + \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{1.2} S_2 S_{2\alpha-2} \ldots + mS_{2\alpha}.$$

On peut simplifier cette relation en considérant que les termes à égale distance des extrêmes sont égaux et de même

signe. En outre, le développement ayant $2\alpha+1$ termes, le terme du milieu est $\pm\frac{2\alpha(2\alpha-1)(2\alpha-2)\ldots(\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha}S_\alpha S_\alpha$.

Donc enfin, en divisant par 2, c'est-à-dire en prenant les α premiers termes et seulement la moitié du terme du milieu, on a pour la relation cherchée

$$s_\alpha = mS_{2\alpha} - 2\alpha S_1 S_{2\alpha-1} + \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{1.2}S_2 S_{2\alpha-2}\ldots$$
$$\pm\frac{1}{2}\,\frac{2\alpha(2\alpha-1)(2\alpha-2)\ldots(\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha}S_\alpha S_\alpha.$$

Pour résumer, on calculera les sommes $S_1, S_2, S_3\ldots S_{2n}$ au moyen des relations (2) du n° 410, qui sont

$$S_1+P=0,\quad S_2+PS_1+2Q=0,\ \text{etc.};$$

puis, dans la formule précédente, qui donne la valeur de s_α, on fera successivement $\alpha=1$, $\alpha=2$, $\alpha=3,\ldots\alpha=n$, ce qui donnera, pour déterminer les n sommes $s_1, s_2\ldots s_n$, les relations $s_1=mS_2-S_1S_1$, $s_2=mS_4-4S_1S_3+3S_2S_2$, etc.; enfin on calculera les n coefficients $p, q, r\ldots$, au moyen des relations entre ces coefficients et les sommes $s_1, s_2\ldots s_n$, d'où l'on tire

$$p=-s_1;\quad q=-\frac{1}{2}(s_2+ps_1),\quad r=-\frac{1}{3}(s_3+ps_2+qs_1),\ \text{etc.}$$

Si l'on applique cette règle à l'équation $x^3-7x+7=0$, on trouve que l'équation aux carrés des différences, qui doit être de la forme $z^3+pz^2+qz+r=0$, est réellement

$$z^3-42z^2+441z-49=0.$$

En opérant de même sur l'équation générale du troisième degré $x^3+Qx+R=0$, on trouve

$$z^3+6Qz^2+9Q^2z+(4Q^3+27R^2)=0.$$

414. Application II. *Éliminer* x *entre les deux équations*

(1) $x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}\ldots=0,$

(2) $x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}+R'x^{n-3}\ldots=0,$

où P, Q, ... P', Q'... *sont des fonctions de* y.

Supposons que le degré m de la première ne soit pas inférieur au degré n de la seconde. Admettons qu'ayant résolu l'équation (1) par rapport à x, ses diverses valeurs soient a, b, c,.... fonctions de y; en faisant successivement $x=a$, $x=b$, $x=c$, etc., dans l'équation (2), on aura, pour déterminer les valeurs de y, les m équations

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} a^n + Pa^{n-1} + Qa^{n-2} + Ra^{n-3}\ldots = 0, \\ b^n + Pb^{n-1} + Qb^{n-2} + Rb^{n-3}\ldots = 0, \\ c^n + Pc^{n-1} + Qc^{n-2} + Rc^{n-3}\ldots = 0, \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Or, si l'on multiplie entre elles ces m équations, on aura une équation résultante qui sera satisfaite par chaque valeur de y tirée de l'une d'elles, et ne pourra l'être autrement. Donc l'équation résultante est l'*équation finale* en y. Comme d'ailleurs les facteurs de ce produit restent les mêmes quand on change les quantités a, b, c,... les unes dans les autres, il est clair que le produit ne renfermera que des fonctions symétriques entières et rationnelles de ces quantités, et par suite pourra s'exprimer rationnellement au moyen des coefficients de l'équation (1).

415. Ce procédé donne le degré de l'équation finale.

En effet, chaque terme du produit des m équations (3) étant le produit de m termes pris chacun dans une de ces m équations, et que nous désignerons en général par Aa^α, Bb^β, Cc^γ..., le terme du produit sera $(ABC\ldots)(a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots)$. Mais le produit total est une fonction symétrique des quantités a, b, c... Donc il contiendra tous les termes de même forme qu'on peut composer avec ces quantités, lesquels termes sont compris dans l'expression $(ABC\ldots)(a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots)$, dont il reste à évaluer le degré.

Le degré de chaque terme des équations (1) et (2) devant égaler au plus le degré de l'équation, il résulte des conventions précédentes que le degré de y égale au plus $n-\alpha$ dans A, $n-\beta$ dans B, $n-\gamma$ dans C,.... Donc ABC... est au plus d'un degré égal à $mn-\alpha-\beta-\gamma\ldots$ D'ailleurs, P étant au plus du 1er degré en y, Q du 2e..., les relations (2) du n° 410

montrent que le degré de y sera au plus égal à 1 dans S_1, à 2 dans S_2..., à α dans S_α, et en général à $\alpha+\beta+\gamma+$ etc., dans la fonction $S(a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots)$. Donc le degré en y de l'expression $(ABC\ldots)\,S(a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots)$, et par suite de l'équation finale, est au plus égal à mn.

Cette proposition étendue à un nombre quelconque d'équations n'est autre que le théorème de Bezout (334).

*CHAPITRE X.

SÉRIES.

SECTION PREMIÈRE.

NOTIONS SUR LES SÉRIES. THÉORÈMES SUR LEUR CONVERGENCE. BINÔME POUR TOUS LES CAS. SÉRIES EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES.

§ 1er. *Notions sur les séries.*

416. On appelle série une suite illimitée de termes qui procèdent suivant une certaine loi. Une série n'est utile que si l'on connaît la loi suivant laquelle chaque terme se déduit des précédents; parce qu'alors on peut calculer un terme d'un rang quelconque sans être obligé de passer par les termes intermédiaires. Le terme qui sert à calculer tous les autres se nomme terme *général*, et doit ainsi contenir une indéterminée, dont les valeurs particulières le changent en tel terme qu'on voudra.

Une série est dite *convergente*, lorsque la somme d'un nombre limité de termes consécutifs, à partir du premier, s'approche de plus en plus d'une certaine valeur fixe, à mesure 'on prend plus de termes, de manière à pouvoir différer de

cette valeur d'aussi peu que l'on voudra. L'ensemble des termes négligés s'appelle l'*erreur* de cette valeur. Les séries qui ne remplissent pas cette condition sont nommées *divergentes*.

On appelle *somme* de la série la valeur fixe dont une série convergente s'approche indéfiniment, à mesure qu'on prend un nombre de termes très-considérable et toujours croissant, mais qu'on ne pourrait atteindre qu'en prenant les termes en totalité, c'est-à-dire en nombre infini.

417. L'emploi des séries se présente dès les premières opérations de l'Algèbre. Si l'on veut, par exemple, diviser a par $1-x$, on trouve

$$\frac{a}{1-x}=a+ax+ax^2+\text{etc.}$$

La nature même de l'opération montre que le quotient ne s'arrêtera pas, mais formera une série dont chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par x.

Si l'on suppose x positif, il est facile de voir que cette série est convergente ou divergente, selon qu'on a $x<1$ ou $x>1$.

En effet, si l'on représente par S_n la somme des n premiers termes, on a

$$S_n=a(1+x+x^2\ldots+x^{n-1})=\frac{a(1-x^n)}{1-x}=\frac{a}{1-x}-\frac{ax^n}{1-x}.$$

Cela posé, 1° soit $x<1$. Alors l'expression $\frac{ax^n}{1-x}$ diminue à mesure que n augmente, et peut même (326, 3°) devenir aussi petite qu'on voudra, en prenant n suffisamment grand. Donc la valeur complète ou la somme de la série s'approche de plus en plus d'égaler $\frac{a}{1-x}$, ce qui a lieu lorsqu'on a $n=\infty$. Donc la série est convergente.

2° Soit $x>1$. Alors on reconnaît à l'inspection même de la série que les termes vont en croissant à mesure que n augmente ; donc leur somme ou la série peut devenir aussi grande qu'on voudra, et par conséquent est divergente.

418. Les termes d'une série peuvent décroître indéfiniment, sans pour cela que la série soit convergente.

Soit, par exemple, la série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\text{etc.}$$

dont les termes décroissent indéfiniment. Si l'on fait la somme des n termes qui suivent le terme $\frac{1}{n}$, savoir

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\ldots+\frac{1}{2n},$$

comme chaque terme est plus petit que l'un quelconque des précédents, cette somme sera toujours plus grande que $n.\frac{1}{2n}$ ou $\frac{1}{2}$. Donc la somme de tous les termes qui suivent l'un quelconque $\frac{1}{n}$, se composant d'un nombre infini de parties plus grandes que $\frac{1}{2}$, a une valeur infinie. Par conséquent la série est divergente.

419. Il faut bien se garder de croire que la série

$$a+ax+ax^2+\text{etc.}$$

supposée prolongée à l'infini, doit toujours représenter la valeur exacte du quotient de a divisé par $1-x$, quel que soit x. En effet, on a bien

$$\frac{a}{1-x}=a+ax+ax^2+\text{etc.}$$

pour toutes les valeurs de x plus petites que 1, puisqu'alors la série forme une progression par quotient décroissante dont la somme est réellement $\frac{a}{1-x}$, comme on l'a vu plus haut (236, 3°). Mais l'égalité devient fausse pour toute valeur de x plus grande que 1, comme $x=2$. En effet, dans ce cas le premier membre est $-a$, et le second est l'infini.

En général, si l'on se borne aux $n+1$ premiers termes, en ajoutant le dernier reste divisé par le diviseur, on a rigoureu-

sement, quel que soit x,

$$\frac{a}{1-x}=a+ax+ax^2\ldots+ax^n+\frac{ax^{n+1}}{x-1}.$$

Mais si l'on veut avoir tous les termes de la série, il faut faire $n=\infty$, ce qui rend la fraction $\frac{ax^{n+1}}{1-x}$ égale à 0 ou à $-\infty$, suivant qu'on a $x<1$ ou $x>1$. Donc on peut la supprimer dans le premier cas, et non dans le second.

D'après cela, pour qu'une série puisse remplacer une fonction, il faut nécessairement qu'elle lui soit tout à fait équivalente, et que, par conséquent, si l'on s'arrête à un terme quelconque, la valeur des termes négligés se réduise à zéro, lorsqu'on suppose les termes conservés pris en nombre infini. Or les séries convergentes satisfont toujours à cette condition.

§ 2. *Théorèmes sur la convergence des séries.*

420. Les séries convergentes étant les seules utiles, et que par suite on doive admettre dans le calcul, il faut avant tout chercher les moyens de reconnaître si une série donnée satisfait à cette condition.

Soit une série quelconque

$$(1)\quad u_0+u_1+u_2+u_3\ldots\ldots+u_n+\text{ etc.},$$

et S_n la somme des n premiers termes.

Si cette série est convergente, il résulte de la définition (416) qu'en prenant n suffisamment grand, les sommes successives S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, etc., doivent s'approcher indéfiniment d'une certaine limite L, et par conséquent n'avoir entre elles que des différences pouvant devenir aussi petites qu'on voudra.

Or on a

$$\begin{aligned}S_n&=u_0+u_1+u_2\ldots\ldots+u_{n-1}\\ S_{n+1}&=u_0+u_1+u_2\ldots\ldots+u_{n-1}+u_n\\ S_{n+2}&=u_0+u_1+u_2\ldots\ldots+u_{n-1}+u_n+u_{n+1}\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$S_{n+1}-S_n=u_n,\ S_{n+2}-S_{n+1}=u_{n+1},\ \text{etc.},$$

et par suite

$$S_{n+1}-S_n=u_n,\ S_{n+2}-S_n=u_n+u_{n+1},$$
$$S_{n+3}-S_n=u_n+u_{n+1}+u_{n+2},\ \text{etc.};$$

donc, pour que la série soit convergente, il faut que, n étant pris suffisamment grand,

1° Tous les termes, à partir de u_n, puissent devenir aussi petits qu'on voudra;

2° Toutes les sommes u_n+u_{n+1}, $u_n+u_{n+1}+u_{n+2}$, etc., puissent également devenir aussi petites qu'on voudra.

La première condition ne suffisant pas, comme on vient de le voir (418), et la seconde étant souvent difficile à vérifier, on y supplée par d'autres conditions que fournissent les trois théorèmes suivants, comprenant les cas habituels.

421. Théorème i. *Étant donnée une série* $u=u_0+u_1+u_2+$ etc., *dont les termes n'ont pas tous le même signe, si les mêmes termes pris positivement forment une série convergente, la série donnée l'est également.*

En effet, si, en prenant n suffisamment grand, la somme des termes de la seconde série à partir de u_n peut devenir aussi petite qu'on voudra, il en sera de même, à plus forte raison, quand on prendra négativement ceux des termes qui sont négatifs dans la série donnée. Celle-ci est donc aussi convergente.

422. Théorème ii. *Une série est convergente, lorsque ses termes à partir d'un certain rang sont alternativement positifs et négatifs, et décroissent de manière à devenir aussi petits qu'on voudra.*

En effet, soit $\pm a$ un terme compris dans la portion de la série satisfaisant aux conditions de l'énoncé; à partir de ce terme, la série sera

$$\pm a\mp b\pm c\mp d\pm \text{etc.},$$

et en désignant par l sa valeur, on aura les deux relations

$$l=\pm[(a-b)+(c-d)+\text{etc.}],$$
$$l=\pm[a-(b-c)-(d-e)-\text{etc.}],$$

où les quantités $a-b$, $c-d$, ... $a-(b-c)-(d-e)$....,

sont toutes positives, puisque les termes vont en décroissant.

La première relation montre que l est de même signe que a, et la seconde que l est plus petit que a. Comme en outre a peut être supposé aussi petit qu'on voudra, en le prenant suffisamment éloigné, il est clair que l peut également devenir aussi petit qu'on voudra, et que, par conséquent, la série est convergente.

Par exemple, la série $U' = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$ etc. est évidemment convergente, puisqu'elle remplit les conditions du théorème.

423. THÉORÈME III. *Étant donnée une série*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 \ldots\ldots + u_n + \text{etc.};$$

si tous les termes à partir d'un certain rang sont positifs, et que pour de très-grandes valeurs de n *le rapport du terme* u_{n+1} *au précédent* u_n *converge vers une limite* L, *la série est convergente ou divergente selon qu'on a* $L < 1$ *ou* $L > 1$.

1° Soit $L < 1$. Choisissons à volonté un nombre r compris entre 1 et L, r sera < 1. On peut, d'après l'énoncé, prendre n assez grand, pour que les rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n}, \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}, \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}$, etc., diffèrent de L d'aussi peu qu'on voudra, et soient, par conséquent, $< r$. Alors à partir de u_n, les termes de la série

$$u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, \text{etc.},$$

seront respectivement plus petits que

$$ru_n, ru_{n+1}, ru_{n+2}, \text{etc.},$$

et, à plus forte raison, que

$$ru_n, r^2u_n, r^3u_n \text{ etc.}$$

Mais ceux-ci forment une progression par quotient, dont la raison est < 1, et qui est ainsi convergente (236, 3°). Donc, à plus forte raison, la série $u_{n+1} + u_{n+2} +$ etc., est convergente, et par suite la série donnée l'est également.

2° Soit $L > 1$. Choisissons à volonté un nombre r compris entre 1 et L, r sera > 1. En raisonnant comme ci-dessus, on

voit qu'on peut prendre n assez grand pour que les termes

$$u_{n+1},\ u_{n+2},\ u_{n+3},\ \text{etc.}$$

soient respectivement plus grands que

$$ru_n,\ r^2u_n,\ r^3u_n,\ \text{etc.}$$

Or ceux-ci croissent indéfiniment; donc les termes de la série

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\text{etc.}$$

croîtront de même indéfiniment; d'où il résulte que cette série est divergente, et que, par conséquent, la série donnée l'est également.

Remarque. Si tous les termes sont négatifs au delà d'un certain rang, le théorème est vrai pour la série — U.

Dans ces deux cas, le théorème laisse quelque incertitude, lorsque la limite $L=1$.

424. Prenons pour exemple les deux séries suivantes U'' et U''', où l'on suppose x positif.

1° Soit la série

$$U''=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\text{etc.}$$

Le rapport des termes $\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n+1}$ et $\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$ est $\frac{x}{n+1}$. On voit qu'en faisant croître n indéfiniment, la valeur de ce rapport s'approche de plus en plus de zéro, qui est ainsi sa limite. Donc la série est convergente, quel que soit x.

2° Soit

$$U'''=1-\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2\ldots\pm\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n\mp\text{etc.}$$

le rapport du terme en x^{n+1} au précédent, qui est en x^n, sera

$$-\left(\frac{m-n}{n+1}\right)x=\left(\frac{n+1}{n+1}-\frac{m+1}{n+1}\right)x=\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)x,$$

et, par conséquent, sera toujours positif pour des valeurs de n suffisamment grandes; de sorte qu'à partir d'un certain rang, les termes de la série seront tous de même signe. La

limite du rapport ci-dessus est $L = x$. Donc, x étant positif, la série sera convergente ou divergente, selon qu'on aura $x < 1$ ou $x > 1$.

425. Pour avoir une limite de l'erreur que l'on commet en prenant la somme des n premiers termes d'une série convergente au lieu de la série entière, le procédé général consiste à comparer les termes suivants de la série donnée avec ceux d'une progression par quotient décroissante, comme on l'a fait dans le théorème précédent. Si alors ces termes de la série décroissent plus rapidement que les termes correspondants de la progression, on peut prendre la somme des termes de celle-ci pour la limite de l'erreur qui est nécessairement moindre.

Dans l'exemple de la série U' (422) il est évident *à priori* que l'erreur est toujours moindre que le premier des termes négligés.

Dans l'exemple de la série U'' (423, 1°), si l'on prend n tel qu'on ait $x < n$, on sera certain que les termes qui suivent le n^e, savoir

$$\frac{x^n}{1.2...n} + \frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(1+1)} + \text{etc.},$$

décroîtront plus rapidement que les termes de la progression dont le premier terme est également $\frac{x^n}{1.2...n}$ et dont la raison est $\frac{x}{n}$. Donc si dans la série U'' on prend la somme des n premiers termes pour la valeur totale de la série, l'erreur sera inférieure à la somme des termes de cette progression, et, par conséquent (236, 3°), sera moindre que

$$\frac{x^n}{1.2.3...(n-1)} \cdot \frac{1}{(n-x)}.$$

Pour $x = 1$, la même série devient

$$1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} \cdots + \frac{1}{1.2.3...n} + \text{etc.},$$

dont la somme est la base des logarithmes népériens ou hyperboliques, et se désigne par la lettre e (238). La somme des n

premiers termes donne pour e une valeur approchée à moins de

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{1}{(n-1)}.$$

Si $n=11$, on a

$$e=2{,}7182818$$

à moins de $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}\cdot\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{36238000}$.

Il est d'ailleurs facile de démontrer que le nombre e ne peut être rationnel. En effet, comme la somme $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+$etc. est moindre que la progression par quotient $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+$ etc. dont la somme est 1, on voit d'abord que e se trouve compris entre 2 et 3. Or supposons qu'on puisse avoir

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}\ldots+\frac{1}{2.3\ldots b}+\text{etc.},$$

en multipliant les deux nombres par $2.3\ldots(b-1)\,b$, on aurait

$$2.3\ldots b(-1).a=\mathrm{N}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)\,(b+2)}+\text{etc.},$$

N désignant un entier. Mais la partie fractionnaire étant plus petite que la progression $\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^3}+$ etc., dont la somme est $\frac{1}{b}$, il en résulte qu'en ajoutant à N une fraction plus petite que $\frac{1}{b}$ la somme serait un entier Cette absurdité prouve que e ne peut être qu'irrationnel.

426. On peut encore assigner deux limites comprenant l'erreur qu'on commet en se bornant aux n premiers termes d'une série, c'est-à-dire, trouver deux quantités, l'une plus grande, l'autre plus petite que la somme des termes négligés. Par exemple, si dans la série U''' (424, 2°), convergente seulement pour $x<1$, on fait $x=\frac{1}{z}$, et que, pour abréger, on représente par N le terme qui en a n avant lui, il est facile de

voir, en ajoutant + 1 et — 1 au numérateur des coefficients des puissances de $\frac{1}{z}$, qu'à partir de N les termes de la série seront

$$N+N\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)\frac{1}{z}+N\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{m+1}{n+2}\right)\frac{1}{z^2}+\text{etc.}$$

Comme ils décroissent plus rapidement que ceux de la progression par quotient indéfinie

$$N+N\frac{1}{z}+N\frac{1}{z^2}+\text{etc.},$$

et moins rapidement que ceux de la progression

$$N+N\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)\frac{1}{z}+N\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)^2\frac{1}{z^2}+\text{etc.},$$

il est clair que la somme des termes négligés dans la série à partir du rang $n+1$ sera comprise entre les sommes $\frac{Nz}{z-1}$ et $\frac{Nz(n+1)}{(n+1)a-(n-m)}$ de ces deux progressions. On peut donc les prendre pour les limites de l'erreur.

Si l'on avait la série

$$U''''=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\text{etc.},$$

ne différant de la série U''' que par ses termes tous positifs, en adoptant les mêmes notations que ci-dessus, la somme des termes négligés à partir de N serait

$$N-N\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)\frac{1}{z}+N\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)\frac{1}{z^2}-\text{etc.}$$

Ces termes étant tous décroissants et alternativement positifs et négatifs, on voit que leur somme est

$$< N \quad \text{et} \quad > N-N\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)\frac{1}{z};$$

l'erreur est donc comprise entre ces limites.

§ 3. *Formule du binôme pour tous les cas.*

427. Nous avons vu (170) que m étant un nombre entier positif, le développement de $(a+x)^m$ est donné par la formule

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2 + \text{etc.},$$

et que par suite on a (178)

$$(1)\quad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

On peut donc se borner à considérer cette dernière formule, dont le second membre, multiplié par a^m après qu'on y a remplacé x par $\frac{x}{a}$, donne le développement de $(x+a)^m$.

Lorsque m n'est plus un nombre entier positif, on ignore à quoi équivaut la série formant le second membre. Mais il est clair que, même dans ce cas, sa valeur étant liée à celle de m, la série peut être regardée comme le développement d'une fonction inconnue de m. Si donc on représente cette fonction par $F(m)$, on aura, en général,

$$F(m) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \text{etc.},$$

et de même, en remplaçant m par n,

$$F(n) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

Le produit de ces deux fonctions est

$$F(m), F(n) =$$

$$\left(1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\text{etc.}\right)\left(1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\text{etc.}\right).$$

Or, de quelque manière qu'on groupe les termes en effectuant le produit des deux séries, comme m et n sont des quantités indéterminées auxquelles on n'attribue aucune valeur particulière, on est certain que le résultat devra pouvoir s'appliquer au cas où m et n sont des nombres entiers positifs.

Par conséquent, si l'on réussit à déterminer la forme du produit dans ce dernier cas, il est clair que cette forme doit rester la même, quels que soient m et n. Mais lorsque m et n sont des nombres entiers positifs, $m+n$ en est un pareillement, et comme $(1+x)^m\ (1+x)^n=(1+x)^{m+n}$, on obtient évidemment le développement de $(1+x)^{m+n}$ en mettant $m+n$ au lieu de m dans la formule (1), ce qui donne

$$F(m).F(n) \text{ ou } (1+x)^{m+n}=$$
$$1+(m+n)x+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}x^2+\text{etc.}$$

Donc, quels que soient m et n, le produit des deux séries a cette même forme, qui, par conséquent, doit être regardée comme le développement de $F(m+n)$. Donc, en général,

$$F(m).F(n)=F(m+n).$$

Mais si l'on change n en $n+p$, il vient

$$F(m).F(n+p)=F(m+n+p),$$

et comme $$F(n).F(p)=F(n+p),$$

on a aussi $$F(m).F(n).F(p)=F(m+n+p);$$

ainsi de suite.

Cela posé, 1° si l'on veut déterminer $F(m)$, lorsque m est une fraction positive $\frac{p}{q}$, dont les termes p et q sont entiers et positifs, on prend un nombre q de facteurs égaux à $F\left(\frac{p}{q}\right)$. Alors, d'après ce qui précède, on a

$$F\left(\frac{p}{q}\right).F\left(\frac{p}{q}\right).F\left(\frac{p}{q}\right)\ldots=F\left(\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\text{etc.}\right)=F\left(\frac{qp}{q}\right)=F(p),$$

et par suite $$F\left(\frac{p}{q}\right)^q=F(p);$$

d'où l'on tire, en extrayant des deux côtés la racine de l'indice q,

$$F\left(\frac{p}{q}\right)=\sqrt[q]{F(p)}=F(p)^{\frac{1}{q}}.$$

Mais p étant un nombre entier positif, on a

$$F(p)=(1+x)^p;$$

et l'équation précédente devient

$$F\left(\frac{p}{q}\right)=(1+x)^{\frac{p}{q}};$$

d'où l'on conclut que la série

$$1+\frac{p}{q}x+\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1.2}x^2+\text{etc.},$$

équivalente à $F\left(\frac{p}{q}\right)$, est le développement de $(1+x)^{\frac{p}{q}}$.

2° Si l'on passe au cas où l'exposant m est un nombre négatif $-n$, entier ou fractionnaire, comme alors on a $m+n=0$, et par suite $F(m+n)=F(0)=(1+z)^0=1$, il est clair que le produit $F(m).F(n)$ devient $F(-n).F(n)=1$, d'où

$$F(-n)=\frac{1}{F(n)};$$

or, n étant positif, soit entier, soit fractionnaire, on vient de voir que $F(n)=(1+x)^n$. On a donc

$$F(-n)=\frac{1}{(1+x)^n}=(1+x)^{-n},$$

c'est-à-dire que la série

$$1-nx+\frac{n(n+1)}{1.2}x^2-\text{etc.}$$

est le développement de $(1+x)^{-n}$.

Donc, quel que soit m, on a

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\text{etc.},$$

et par suite

$$(a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2+\text{etc.}$$

428. Reprenons la série

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2...+\frac{m(m-1)(m-2...(m-n+1)}{1.2.3...n}x^n+\text{etc.}$$

Lorsque m est un nombre entier positif, cette série se réduit à un polynôme composé d'un nombre fini de termes. En effet, si dans le terme général on donne à n une valeur plus grande que m, le numérateur du coefficient contient un facteur qui devient zéro. Ainsi la série se termine et a pour somme $(1+x)^m$.

Lorsque m est fractionnaire ou négatif, il est évident que la série doit toujours se composer d'un nombre infini de termes. Pour reconnaître quand elle est convergente, et par conséquent susceptible d'être employée, il suffit de prendre le rapport de deux termes consécutifs, de ceux, par exemple, qui en ont n et $n+1$ avant eux. Ce rapport est égal (424) à $\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)x$; et par suite la série est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, divergente pour toutes les valeurs numériques de x plus grandes que 1.

§ 4. *Séries exponentielles et logarithmiques.*

429. Ces deux sortes de séries se déduisent aisément de la formule du binôme

$$(1)\qquad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \text{etc.}$$

1° Cherchons d'abord les développements des exponentielles e^x et a^x. A cet effet, remplaçons dans la formule précédente x par αx et m par $\frac{1}{\alpha}$; alors pour toutes les valeurs de αx comprises entre $-\frac{1}{\alpha}$ et $+\frac{1}{\alpha}$, nous aurons

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + x + \frac{x^2}{2}(1-\alpha) + \frac{x^3}{1.2.3}(1-\alpha)(1-2\alpha) + \text{etc.}$$

Cette équation devant subsister, quelque petite que soit la valeur numérique de α, si l'on désigne, comme à l'ordinaire, par l'abréviation *lim.* placée devant une expression qui renferme la variable α, la limite vers laquelle converge cette ex-

pression, lorsque la valeur de α décroît indéfiniment, on trouvera, en passant aux limites, et pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et $+\infty$,

$$lim.\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Or, pour trouver la limite de $(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$; si dans la formule précédente on fait $x=1$, on aura

$$lim.\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \text{etc.},$$

où la série numérique formant le second membre a pour somme le nombre désigné par e dans le n° 425, et dont on peut obtenir une valeur aussi approchée qu'on voudra.

On a donc $$lim.\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e;$$
d'où l'on tire, en remplaçant α par αx,

$$lim.\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}} = e.$$

Si l'on élève les deux membres à la puissance x, il vient

$$\left[lim.\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^x = e^x,$$

ou enfin $$lim.\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = e^x.$$

Par conséquent, le développement de l'exponentielle e^x est

$$(2) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Cette série est toujours convergente (424 et 422) pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

Si l'on représente par a une quantité positive quelconque, et qu'on désigne par la lettre l les logarithmes dont la base est e, on a l'égalité $a = e^{la}$, et par suite $a^x = e^{xla}$. Ainsi la formule (2) devient

$$(3) \quad a^x = 1 + x\,la + \frac{(x\,la)^2}{1.2} + \frac{(x\,la)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Cette série est également convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

2° Cherchons maintenant le développement de $l(1+x)$.

A cet effet, si dans la formule (1) on retranche 1 des deux membres, et qu'on divise par m, on obtient un résultat qui peut s'écrire

$$\frac{(1+x)^m-1}{m}=x-\frac{x^2}{4}(1-m)+\frac{x^3}{3}(1-m)\left(1-\frac{m}{2}\right)$$
$$-\frac{x^4}{4}(1-m)\left(1-\frac{m}{2}\right)\left(1-\frac{m}{3}\right)+\text{etc.},$$

où le second membre est une série convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$.

Or, si l'on fait converger m vers la limite zéro, on trouvera, en passant aux limites,

$$lim.\frac{(1+x)^m-1}{m}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\text{etc.}$$

En outre, comme on a $1+x=e^{l(1+x)}$, et par suite

$$(1+x)^m=e^{ml(1+x)}=1+ml(1+x)+\frac{m^2[l(1+x)]^2}{1.2}+\text{etc.},$$

d'où l'on tire

$$\frac{(1+x)^m-1}{m}=l(1+x)+\frac{m[l(1+x)]^2}{1.2}+\text{etc.};$$

on en conclut, en faisant converger m vers zéro,

$$lim.\frac{(1+x)^m-1}{m}=l(1+x),$$

ce qui donne une seconde valeur du premier membre. Donc en égalant les seconds membres de ces valeurs, on a

$$(4)\qquad l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}$$

Cette formule subsiste tant que la valeur numérique de x est inférieure à l'unité. Dans ce cas, en effet, la série qui forme le second membre est convergente (422), aussi bien que la série $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+$ etc., qui n'en diffère que par les signes

des termes de rang pair (323). Mais l'une et l'autre série deviennent divergentes, dès qu'on suppose la valeur numérique de x supérieure à l'unité, et l'équation (4) cesse d'avoir lieu.

Dans le cas particulier où l'on fait $x=1$, la série de la formule (4) devient

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{etc.},$$

qui est convergente (422). On a donc

$$l(2)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{etc.}$$

Mais si l'on fait $x=-1$, la série de la formule (4) devient

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\text{etc.},$$

qui, prise en totalité, a une valeur infinie (418). Donc alors la formule (4) donne $l(0)=-\infty$, ce qui est exact.

Enfin si, après avoir remplacé x par $-x$ dans la formule (4), on change le signe des deux membres, en remarquant que $l(1)=0$, on a

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\text{etc.}$$

Remarque. Nous donnons plus loin (443, etc.) une autre méthode pour obtenir la formule du binôme, ainsi que les développements de a^x et de $l(1+x)$.

430. On peut déduire de la formule (4) une autre formule servant à calculer les logarithmes des nombres entiers consécutifs. En effet, si l'on pose $x=\frac{1}{n}$, comme

$$l\left(1+\frac{1}{n}\right)=l\left(\frac{n+1}{n}\right)=l(n+1)-l(n),$$

on a

$$(5)\qquad l(n+1)=l(n)+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\text{etc.}$$

Pour obtenir une formule plus commode, si l'on change x en $-x$ dans la formule (4), on a l'équation

$$l(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\text{etc.},$$

qui retranchée, membre à membre, de l'équation (4) donne

$$l(1+x)-l(1-x)=l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\text{etc.}\right).$$

Or si l'on pose $\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{z}{n}$, d'où $x=\frac{z}{2n+z}$, il vient alors

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=l\left(1+\frac{z}{n}\right)=l\left(\frac{n+z}{n}\right)=l(n+z)-l(n);$$

donc

$$(6)\ l(n+z)=l(n)+2\left(\frac{z}{2n+z}+\frac{z^3}{3(2n+z)^3}+\frac{z^5}{5(2n+z)^5}+\text{etc.}\right).$$

Au moyen de cette formule, on s'élève aisément de $l(n)$ à $l(n+z)$.

Si $z=1$, on a

$$(7)\ l(n+1)=l(n)+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\text{etc.}\right).$$

Ces formules sont convergentes pour toutes les valeurs positives de n.

481. Toutes les formules précédentes ne donnent que les logarithmes népériens ; mais on en déduit aisément d'autres qui donnent les logarithmes dans une base quelconque a, par exemple les logarithmes vulgaires dont la base est 10, et qu'on désigne ordinairement par la lettre L. Car il suffira (245) de multiplier les logarithmes népériens par le module $\frac{1}{l10}$. Si donc on représente ce module par M, les formules (4) et (7) deviennent

$$L(1+x)=M\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\text{etc.}\right),$$

$$L(n+1)=Ln+2M\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{2}{3(2n+1)^3}+\text{etc.}\right).$$

Pour obtenir la valeur du module M, on doit diviser 1 par

$l\,10$. A cet effet, on calcule avec la formule (7) le logarithme népérien de 2 en faisant $n=1$, puis on a $l\,4=2\,l\,2$. Alors la formule (7) donne $l\,5$ en y faisant $n=4$, et enfin la formule (6) donne $l\,10=l\,5+l\,2$.

On trouve ainsi

$$l\,10=2{,}302385092\ldots\ldots,$$

donc

$$M=0{,}434294481\ldots\ldots$$

SECTION II.

MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS POUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE, ET PRINCIPALES APPLICATIONS.

§ 1er. *Principes de la méthode des coefficients indéterminés.*

432. Le développement d'une fonction en série peut s'effectuer à l'aide d'une méthode dite des *coefficients indéterminés.* Cette méthode, d'un usage facile et commode, peut s'employer, 1° lorsqu'on a reconnu d'avance qu'il existe une série convergente équivalente à la fonction donnée, et qu'on veut seulement procéder plus simplement que par les calculs ordinaires; 2° lors même qu'on ignore s'il existe une série convergente équivalente à la fonction donnée, et qu'on suppose son existence, pour voir si elle sera confirmée par le calcul.

Dans le premier cas, la série trouvée n'exige aucune vérification ultérieure. Mais il n'en est pas de même dans le second, et il est absolument indispensable de vérifier d'abord si la série obtenue est réellement convergente, au moins pour de petites valeurs de la lettre x suivant laquelle elle est ordonnée, et, en outre, si elle est équivalente à la fonction donnée.

Cette méthode peut s'appliquer à la recherche des développements de presque toutes les fonctions algébriques. Mais si

elle est commode dans la pratique, elle exige les plus grandes précautions pour être employée avec certitude, à cause des vérifications qu'elle nécessite ordinairement.

433. Supposons, ce qui est le cas le plus ordinaire, que la fonction $F(x)$, qu'on veut développer suivant les puissances ascendantes, entières et positives de x, ait des valeurs réelles et variant d'une manière continue, pour de très-petites valeurs de x prises à partir de $x = 0$.

Posons donc $F(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$,

$A, B, C, \ldots$ étant des coefficients indépendants de x.

Pour les déterminer, on choisit une propriété de la fonction $F(x)$, offrant d'ailleurs une vérification facile, et conduisant à une égalité de la forme

$$(1) \quad M + Nx + Px^2 + Qx^3 + \text{etc.} = 0,$$

qui puisse être également supposée convergente, $M, N, P, \ldots$ étant fonctions des coefficients $A, B, C, \ldots$ et indépendants de x. L'égalité (1) devant subsister sans qu'on attribue à x de valeur particulière, il faut, comme nous allons le faire voir, que les multiplicateurs des diverses puissances de x soient nuls séparément, et qu'ainsi l'on ait les relations

$$M = 0, \; N = 0, \; P = 0, \text{ etc.},$$

d'où l'on déduira les valeurs des coefficients A, B, C, etc.

Dans certains cas, ces coefficients seront exprimés au moyen de l'un d'entre eux qui semblera rester indéterminé, et dont on devra trouver la valeur par d'autres considérations.

Il reste maintenant à prouver que si une équation

$$(1) \quad M + Nx + Px^2 + Qx^3 + \text{etc.} = 0,$$

qui satisfait d'ailleurs aux conditions énoncées plus haut, doit subsister sans qu'on attribue à x des valeurs particulières, il faut qu'on ait en même temps

$$M = 0, \; N = 0, \; P = 0, \text{ etc.}$$

Faisons, pour abréger, $Nx + Px^2 + Qx^3 + \text{etc.} = Ux$, ce qui change l'équation (1) en

$$M + Ux = 0,$$

et donnons à x de très-petites valeurs indéfiniment décroissantes. Alors le coefficient M, qui est indépendant de x, ne changera pas de valeur; mais tous les termes de U décroîtront indéfiniment, excepté le premier N qui ne contient pas x et doit ainsi rester le même. Donc le polynôme U, et par suite le polynôme Ux, s'approchera indéfiniment de la valeur N. Or, d'après l'équation $M + Ux = 0$, la valeur de Ux devrait constamment être égale à $-M$, quel que soit x. Donc cette équation ne peut subsister indépendamment des valeurs particulières de x, sans qu'on ait $M = 0$, et par suite $U = 0$.

Maintenant on a $Nx + Px^2 + Qx^3 + \text{etc.} = 0$, et en divisant par x, il vient

$$N + Px + Qx^2 + \text{etc.} = 0.$$

Si l'on raisonne sur cette équation comme sur l'équation (1), on prouvera de même qu'on doit avoir $N = 0$, puis $P = 0$, et ainsi de suite; ce qu'il fallait démontrer.

434. *Remarque* I. Le même raisonnement sert à faire voir qu'une même fonction $F(x)$ ne peut avoir deux développements en série convergente de la forme $A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}$

Car si elle pouvait en avoir un autre $A' + B'x + C'x^2 + \text{etc.}$, on en conclurait

$$A + Bx + Cx^2 + \text{etc.} = A' + B'x + C'x^2 + \text{etc.},$$

d'où $$(A - A') + (B - B')x + (C - C')x^2 + \text{etc.} = 0;$$

et alors, d'après ce qui précède, on devrait avoir

$$A - A' = 0,\ B - B' = 0,\ C - C' = 0,\ \text{etc.},$$

d'où $$A = A',\ B = B',\ C = C',\ \text{etc.}$$

Ainsi les deux prétendus développements doivent être identiques.

Donc aussi deux séries convergentes, ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières d'une variable x, ne peuvent être égales sans être identiques.

435. *Remarque* II. Nous avons démontré (40) que deux polynômes en nombre fini de termes, ordonnés suivant les puissances entières descendantes ou ascendantes d'une même lettre x, ne peuvent être égaux, indépendamment de toute valeur

de x, sans être identiques, mais le même raisonnement ne pourrait s'appliquer aux séries, dont le nombre des termes est illimité.

On ne pourrait pas non plus démontrer la proposition relative à l'équation (1) en faisant d'abord $x=0$, ce qui donnerait $M=0$, et $Nx+Px^2+Qx^3+$ etc. $=0$, puis en divisant cette dernière équation par x, et faisant encore $x=0$, ce qui donnerait $N=0$, ainsi de suite. Car, la valeur $M=0$ étant donnée par $x=0$, on a bien rigoureusement

$$Nx+Px^2+Qx^3+\text{etc.}=0, \quad \text{ou} \quad x(N+Px+Qx^2+\text{etc.})=0,$$

et, en divisant par x, $N+Px+Qx^2+$ etc. $=0$. Mais on ne peut plus faire $x=0$ dans cette équation, puisque ayant déjà divisé par x, on se trouverait avoir divisé par zéro.

§ 2. *Application aux expressions fractionnaires. Séries récurrentes.*

436. Proposons-nous, pour application de la méthode précédente, de développer en série l'expression fractionnaire $\frac{a'}{a+bx}$. Dans ce cas, on obtiendrait facilement la série équivalente à la fraction donnée, en effectuant la division ou en développant l'expression $a'(a+bx)^{-1}$ par la formule du binôme. Mais lorsque la fraction est plus compliquée, la méthode des coefficients indéterminés devient plus commode.

On reconnaît aisément que le quotient cherché doit être de la forme $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ etc. On posera donc

$$\frac{a'}{a+bx}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.},$$

les coefficients A, B, C, . . étant des quantités indépendantes de x, qu'il faut déterminer. A cet effet, on remarque que le quotient multiplié par le dénominateur devant reproduire identiquement le numérateur, il faut qu'on ait

$$a' = \begin{array}{r} Aa \\ \end{array} \begin{array}{r|} +Ba \\ +Ab \end{array}\, x \begin{array}{r|} +Ca \\ +Bb \end{array}\, x^2 \begin{array}{r|} +Da \\ +Cb \end{array}\, x^3 + \text{etc.},$$

sans attribuer à x de valeur particulière. De là on conclut (433)

$$a'=Aa,\ Ba+Ab=0,\ Ca+Bb=0,\ Da+Cb=0,\ \text{etc.},$$

et par suite

$$A=\frac{a'}{a},\quad B=-\frac{b}{a}A,\quad C=-\frac{b}{a}B,\quad D=-\frac{b}{a}C,\quad \text{etc.}$$

D'où il résulte qu'un coefficient quelconque se forme du précédent en le multipliant par $-\frac{b}{a}$, ou qu'un terme quelconque se forme du précédent en le multipliant par $-\frac{b}{a}x$. Ainsi la série est une progression par quotient dont le premier terme est $\frac{a'}{a}$ et la raison $-\frac{b}{a}x$.

$$\text{Donc}\ \frac{a'}{a+bx}=\frac{a'}{a}-\frac{a'}{a}\cdot\frac{b}{a}x+\frac{a'}{a}\cdot\frac{b^2}{a^2}x^2-\frac{a'}{a}\cdot\frac{b^3}{a^3}x^3+\text{etc.}$$

437. Prenons maintenant l'expression fractionnaire plus générale

$$\frac{a'+b'x+c'x^2\ldots+f'x^{m-1}}{a+bx+cx^2\ldots+gx^m}.$$

Le quotient sera également une série de la forme

$$A+Bx+Cx^2\ldots\ldots+Gx^{m-1}+Hx^m+Ix^{m+1}+\text{etc.}$$

Pour déterminer les coefficients A, B, C,... qui sont indépendants de x, on effectue le produit de la série par le polynôme dénominateur, et comme il doit reproduire identiquement le polynôme numérateur, il en résulte que les coefficients des m premiers termes du produit sont égaux à ceux du numérateur, chacun à chacun, ce qui donnera d'abord m relations pour déterminer les m premiers coefficients A, B,...G de la série; et les coefficients des termes suivants du produit devront être nuls. Si donc on les égale à zéro, on a

$$Ag+\ldots+Gb+Ha=0,$$
$$Bg+\ldots+Hb+Ia=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou bien
$$A\frac{g}{a}+\ldots+G\frac{b}{a}+H=0,$$
$$B\frac{g}{a}+\ldots+H\frac{b}{a}+I=0,$$
....

D'où il résulte qu'à partir du coefficient H, qui est du rang $m+1$, un coefficient quelconque se formera des m précédents en les multipliant respectivement par $\frac{g}{a},\ldots\frac{b}{a}$.

Lorsque le numérateur est d'un degré plus élevé que le dénominateur, ou de même degré, on peut décomposer l'expression proposée en deux parties, l'une entière, et l'autre fractionnaire, mais ayant un numérateur d'un degré moins élevé que le dénominateur, ce qui ramène au cas précédent.

On pourrait encore appliquer immédiatement la méthode à l'expression proposée; car les coefficients du développement seront toujours déterminés d'après la même loi, qui seulement se manifestera un peu plus tard.

438. Dans les exemples qu'on vient de traiter, l'équation au moyen de laquelle on détermine un coefficient quelconque en fonction des précédents se nomme *l'équation caractéristique* de la série; et l'ensemble des quantités, par lesquelles il faut respectivement multiplier les coefficients, se nomme *l'échelle de relation.*

Ainsi, dans le premier exemple, l'équation caractéristique de la série est $Ba+Ab=0$ ou $B+A\frac{b}{a}=0$, et l'échelle de relation n'a que le seul terme $\frac{b}{a}$.

Dans le second exemple, l'équation caractéristique de la série est $Ag+\ldots+Gb+Ha=0$, ou $A\frac{g}{a}+\ldots+G\frac{b}{a}+H=0$, et l'échelle de relation est l'ensemble des quantités $\frac{b}{a},\frac{c}{a},\ldots\frac{g}{a}$, c'est-à-dire les m derniers coefficients du dénominateur dont chacun est divisé par le premier a.

L'équation caractéristique $Ag+\ldots+Gb+Ha=0$ tient lieu

de toutes les équations suivantes, et suffit pour déterminer successivement tous les coefficients H, I,... en fonctions des m coefficients précédents.

Lorsque l'équation caractéristique est du premier degré, chaque coefficient n'est susceptible que d'une seule valeur, et la série est dite *récurrente*.

La fraction équivalente à la série, et qui a servi à l'obtenir, se nomme la *fraction génératrice*.

439. Il est facile de faire voir que toute série récurrente provient du développement d'une fraction rationnelle.

Car soit la série

$$S = A + B + C + D + E + \text{etc.},$$

dont chaque terme ne dépend, par exemple, que des deux précédents, de sorte qu'on a la relation

$$Ap + Bq + Cr = 0.$$

En considérant la série comme indéfinie, le nombre des relations

$$\begin{aligned} Ap + Bq + Cr &= 0, \\ Bp + Cq + Dr &= 0, \\ Cp + Dq + Er &= 0, \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

devient illimité; donc, si l'on fait leur somme, il vient

$$p(A+B+C+\text{etc.})+q(B+C+D+\text{etc.})+r(C+D+E+\text{etc.})=0$$

ou $$pS + q(S - A) + r(S - A - B) = 0,$$

d'où l'on tire $$S = \frac{Aq + (A + B)r}{p + q + r}.$$

Cette expression est évidemment une fraction rationnelle.

440. Les séries récurrentes donnent lieu à trois questions principales, qu'on résout au moyen de ce qui précède.

PROBLÈME I. *Étant données une série récurrente et son équation caractéristique, ou, ce qui revient au même, son échelle de relation, trouver la fraction génératrice?*

Soit la série

$$S = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}$$

censée ordonnée par rapport à une indéterminée x, et

$$Pa + Nb + Mc = 0$$

son équation caractéristique. La fraction génératrice aura pour dénominateur $a + bx + cx^2$, et pour numérateur le produit de ce dénominateur par la série donnée, c'est-à-dire,

$$Aa + (Ba + Ab)x + (Ca + Bb + Ac)x^2 + (Da + Cb + Bc)x^3 + \text{etc.} = 0.$$

Or, d'après la relation donnée, on a $Ca + Bb + Ac = 0$, $Da + Cb + Bc = 0$, et ainsi de suite. Donc la fraction cherchée est

$$S = \frac{Aa + (Ba + Ab)x}{a + bx + cx^2}.$$

Il est clair que cette valeur de S est la somme des termes de la série

Remarque. Si l'on voulait seulement avoir la somme S' des n premiers termes, on chercherait la somme S de tous les termes de la série, et la somme S_1 des termes restants après avoir supprimé les n premiers, ce qui donnerait $S' = S - S_1$.

On pourrait également trouver la somme de n termes consécutifs à partir d'un terme quelconque.

§ 441. PROBLÈME II. *Étant donnée une série, reconnaître si elle est récurrente, et dans ce cas trouver la fraction génératrice?*

Voici la solution de Lagrange.

Soit la série

$$S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

Si elle est récurrente, elle doit provenir du développement d'une fraction rationnelle (438).

1° Voyons d'abord si elle provient d'une fraction de la forme $\frac{a'}{a+bx}$. Dans ce cas on aura

$$S = \frac{a'}{a + bx},$$

d'où l'on tire $\frac{1}{S} = \frac{a + bx}{a'} = \frac{a}{a'} + \frac{b}{a'}x.$

Donc si en divisant 1 par S on obtient un quotient complet et de la forme $\alpha + \beta x$, la série S est récurrente et a pour frac-

tion génératrice

$$S = \frac{1}{\alpha + \beta x}.$$

2° Lorsque la division de 1 par S ne s'arrête pas au second terme, la série S n'est pas récurrente, ou a pour génératrice une fraction plus compliquée.

Soit donc

$$S = \frac{a' + b'x}{a + bx + cx^2}.$$

Dans ce cas on a $\frac{1}{S} = \frac{a + bx + cx^2}{a' + b'x}$.

Le second membre est une expression fractionnaire qui équivaut évidemment à un quotient de la forme $\alpha + \beta x + \frac{a''x^2}{a' + b'x}$. Donc si pour avoir la valeur du premier membre on divise 1 par la série S, et qu'on arrête le quotient aux deux premiers termes $\alpha + \beta x$, la série S_1x^2 qu'on a pour reste, et qui d'ailleurs est toujours divisible par x^2, doit être telle qu'après avoir supprimé ce facteur, le quotient de S_1 par S soit égal à $\frac{a''}{a' + b'x}$.

Ainsi on a dans ce cas

$$\frac{1}{S} = \alpha + \beta x + \frac{S_1}{S} x^2, \quad \text{et} \quad \frac{S_1}{S} = \frac{a''}{a' + b'x}.$$

La seconde égalité donne

$$\frac{S}{S_1} = \frac{a' + b'x}{a''} = \alpha' + \beta' x,$$

et par suite la première revient à

$$\frac{1}{S} = \alpha + \beta x + \frac{x^2}{\alpha' + \beta' x}.$$

Donc quand la division de S par S_1 s'arrête au second terme, la série est récurrente et a pour fraction génératrice

$$S = \frac{\alpha' + \beta' x}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x) + x^2}.$$

3° Lorsque la division de S par S_1 ne s'arrête pas au second terme, la série S n'est pas récurrente, ou a pour génératrice une fraction plus compliquée que la précédente.

Soit donc

$$S = \frac{a' + b'x + c'x^2}{a + bx + cx^2 + dx^3}.$$

En raisonnant comme tout à l'heure et poussant jusqu'aux deux premiers termes le quotient de 1 par S, on aura

$$\frac{1}{S} = \alpha + \beta x + \frac{S_1}{S} x^2, \quad \text{et} \quad \frac{S_1}{S} = \frac{a'' + b''x}{a' + b'x + c'x^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{S}{S_1} = \frac{a' + b'x + c'x^2}{a'' + b''x} = \alpha' + \beta'x + \frac{a'''x^2}{a'' + b''x}.$$

Par conséquent, si l'on arrête le quotient de S par S_1 aux deux premiers termes $\alpha' + \beta'x$, la série S_2x^2 qu'on a pour reste doit être telle qu'après avoir supprimé le facteur x^2 on ait

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{a'''}{a'' + b''x}.$$

De là on tire

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a'' + b''x}{a'''} = \alpha + \beta''x, \quad \text{et par suite} \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{\alpha'' + \beta''x}.$$

En substituant cette valeur dans $\frac{S}{S_1} = \alpha' + \beta'x + \frac{S_2}{S_1} x^2$, il vient

$$\frac{S}{S_1} = \alpha' + \beta'x + \frac{x^2}{\alpha'' + \beta''x} = \frac{(\alpha' + \beta'x)(\alpha'' + \beta''x) + x^2}{\alpha'' + \beta''x},$$

et par conséquent on a

$$\frac{1}{S} = \alpha + \beta x + \frac{(\alpha'' + \beta''x)x^2}{(\alpha' + \beta'x)(\alpha'' + \beta''x) + x^2}.$$

Donc enfin la fraction génératrice est

$$S = \frac{(\alpha' + \beta'x)(\alpha'' + \beta''x) + x^2}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta'x)(\alpha'' + \beta''x) + [(\alpha + \alpha'') + (\beta + \beta'')x]x^2}.$$

Sans pousser plus loin ces considérations, on voit, par ce qui

précède, que si la série est récurrente, on doit toujours parvenir à deux séries S_n et S_{n+1} telles que la division de S_n par S_{n+1} donne un quotient complet de la forme $\alpha+\beta x$. De là il est facile de déduire une règle générale pour opérer dans tous les cas, et reconnaître si la série donnée est récurrente.

442. La troisième question que nous avons en vue est de *trouver le terme général d'une série récurrente*. Mais comme la solution de cette question exige qu'on sache décomposer une fraction rationnelle fonction de x en fractions partielles, dont le dénominateur soit un facteur simple de la forme $x-a$ ou $(x-a)^n$, et dont le numérateur soit indépendant de x, nous allons d'abord nous occuper de cette décomposition, qui a d'ailleurs des applications dans les hautes mathématiques.

Soit $\frac{U}{V}$ une fraction rationnelle algébrique réduite à sa plus simple expression, et soit $x=a$ une racine de l'équation $V=0$, que nous supposerons d'abord n'avoir pas de racines égales. En divisant V par $x-a$ et désignant par Q le quotient qui ne doit pas contenir le facteur $x-a$, on a

$$V=(x-a)Q.$$

Or les polynômes U et Q n'étant pas divisibles par $x-a$, on peut toujours trouver une quantité A indépendante de x et telle que l'expression $\frac{U-AQ}{x-a}=P$, P étant une fonction entière. En effet, si l'on fait $x=a$, et qu'on désigne par u et par q les résultats de la substitution $x=a$ dans U et Q, on trouve $A=\frac{u}{q}$. On aura donc $U-AQ=P(x-a)$, d'où l'on tire

$$\frac{U}{V}=\frac{AQ+P(x-a)}{(x-a)Q}=\frac{A}{x-a}+\frac{P}{Q}.$$

En opérant sur $\frac{P}{Q}$ comme on l'a fait sur $\frac{U}{V}$, et en continuant toujours de même jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les facteurs binômes de V, on aura

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\ldots+\frac{H}{x-h},$$

les numérateurs A, B...H étant indépendants de x et susceptibles d'une seule valeur, puisque chacun d'eux est donné par une équation du premier degré.

Supposons maintenant que l'équation $V=0$ ait des racines égales, par exemple, deux fois la racine $x=a$. Dans ce cas on ne pourra plus trouver une quantité A telle que $U-AQ$ soit divisible par $x-a$; car alors, AQ l'étant aussi, U devrait l'être pareillement, ce qui est contre l'hypothèse, puisque U et V sont premiers entre eux.

Soit, en général,

$$V=(x-a)(x-b)\ldots(x-h)(x-k)^n(x-l)^p\ldots$$

on aura d'abord

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\ldots+\frac{H}{x-h}+\frac{P}{Q},\ \text{et}\ Q=(x-k)^n(x-l)^p\ldots$$

Or, si l'on met Q sous la forme

$$Q=(x-k)^n Q_1,$$

les polynômes P et Q_1 n'étant pas divisibles par $x-k$, on pourra trouver une quantité K indépendante de x, et telle que $P-KQ_1$ soit divisible par $x-k$. Soit P_1 le quotient, on aura

$$P=KQ_1+P_1(x-k);$$

et par suite

$$\frac{P}{Q}=\frac{P}{(x-k)^nQ_1}=\frac{K}{(x-k)^n}+\frac{P_1}{Q_1(x-k)^{n-1}}.$$

En opérant de même, on aura

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{K_1}{(x-k)^{n-1}}+\frac{P_2}{(x-k)^{n-2}Q_1}.$$

Donc, en continuant ainsi jusqu'à ce qu'on ait épuisé l'exposant n, on aura

$$\frac{P}{Q}=\frac{K}{(x-k)^n}+\frac{K_1}{(x-k)^{n-1}}\ldots+\frac{K_{n-1}}{x-k}+\frac{P_n}{Q_1};$$

et si l'on traite de même l'expression $\frac{P_n}{Q_1}$, etc., on aura enfin

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\dots+\frac{H}{x-h}+\frac{K}{(x-k)^n}+\frac{K_1}{(x-k)^{n-1}}$$
$$\dots+\frac{K_{n-1}}{x-k}+\frac{L}{(x-l)^p}+\frac{L_1}{(x-l)^{p-1}}\dots$$

443. PROBLÈME III. *Trouver le terme général d'une série récurrente?*

Soit la série récurrente

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2\dots+\lambda x^n+\text{etc.}$$

Pour trouver son terme général, on commencera par chercher la fraction génératrice qu'on décomposera en fractions partielles, comme il vient d'être indiqué (442). Soit donc cette fraction

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\dots+\frac{H}{x-h}+\frac{K}{(x-k)^p}+\text{etc.}$$

En réduisant toutes les fractions partielles du second membre en séries, et faisant la somme de leurs termes généraux, on aura le terme général cherché.

Pour réduire en série la fraction $\frac{A}{x-a}$, mettons-la sous la forme $\frac{-\frac{A}{a}}{1-\frac{x}{a}}$. Posons $-\frac{A}{a}=R$ et $+\frac{1}{a}=r$; nous aurons $\frac{R}{1-rx}$, dont le développement sera

$$\frac{R}{1-rx}=R(1+rx+r^2x^2\dots+r^nx^n+\dots).$$

On traitera de même les autres fractions partielles dont le dénominateur est un facteur binôme élevé à la première puissance.

Quant aux fractions partielles de la forme $\frac{K}{(x-k)^p}$, on a

$$\frac{K}{(x-k)^p}=\frac{-\frac{K}{k^p}}{\left(1-\frac{x}{k}\right)^p}$$; en posant $-\frac{K}{k}=T$ et $+\frac{1}{k}=t$, il

vient $\frac{T}{(1-tx)^p}$. Maintenant la formule du binôme dans le cas de l'exposant négatif (427) donne

$$\frac{T}{(1-tx)^p}=T(1-tx)^{-p}=T[1+ptx+\frac{p(p+1)}{1.2}t^2x^2$$
$$+\frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}t^3x^3...+\frac{p(p+1)(p+2)..(p+n-1)}{1.2.3...n}t^nx^n+\text{etc.}].$$

Si l'on opère de même sur toutes les fractions partielles de cette seconde forme, et qu'on ajoute les termes généraux des développements fournis par toutes les fractions partielles de l'une et de l'autre forme, on aura pour le terme général cherché

$$\lambda x^n=(Rr^n+R'r'^n+R''r''^n...+\frac{p(p+1)(p+2)...(p+n-1)}{1.2.3...n}t^n+\text{etc.})x^n.$$

Remarque I. Si n était très-grand, on aurait beaucoup de produits à effectuer pour obtenir le terme général des développements fournis par les fractions de la seconde forme; alors il est plus simple de ramener le coefficient du terme général à ne contenir que p facteurs au lieu de n.

1° Soit d'abord $n=p$, on aura $\frac{(n+1)(n+2)...(n+p-1)}{1.2.3...(p-1)}t^n$.

2° Soit $n<p$, en multipliant les deux termes par

$$(n+1)\ (n+2)...(p-1),$$

on aura

$$\frac{(n+1)...p(p+1)...(p+n-1)}{1.2...(p-1)}.$$

3° Soit $n>p$, le coefficient sera

$$\frac{p(p+1)...n(n+1)...(p+n-1)}{1.2...(p-1)p(p+1)...n}=\frac{(n+1)...(p+n-1)}{1.2...(p-1)}.$$

Remarque II. Si le dénominateur V contenait des facteurs imaginaires, le terme général des fractions partielles relatives à ces facteurs renfermerait aussi des quantités imaginaires. Mais lorsque les deux termes U et V n'ont que des coefficients réels, il est clair qu'en cherchant immédiatement le développement

de $\frac{U}{V}$ par la division, le terme général n'aurait que des coefficients réels. D'où il résulte nécessairement que les quantités imaginaires introduites par certains facteurs dans les termes généraux partiels, doivent se détruire dans le terme général de la série égale à $\frac{U}{V}$.

Remarque III. Quand l'échelle de relation de la série donnée n'a que deux termes, comme $P + aM + bN$, le dénominateur de la fraction génératrice est $1 + ax + bx^2$, et cette fraction ne donne que deux fractions partielles $\frac{M}{x-\alpha}$, $\frac{N}{x-\beta}$. Chacune d'elles fournit une série dont l'échelle de relation n'a qu'un terme, et qui par conséquent équivaut à une progression par quotient. La somme des deux termes généraux est le terme général cherché.

§ 3. *Application à la formule du binôme et aux expressions irrationnelles.*

444. On peut, à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés, démontrer la formule du binôme dans le cas de l'exposant fractionnaire ou négatif, ce qui conduit au développement des expressions irrationnelles en série.

1° Soit d'abord le binôme $(x+a)^m$, m étant un nombre entier positif. En formant de proche en proche les premières puissances de $x+a$ par voie de multiplication (169), il est facile de voir que le développement sera de la forme

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + Aa^{m-2}x^2 + Ba^{m-3}x^3 + \text{etc.};$$

car il résulte des règles de la multiplication que les deux premiers termes de $(a+x)^m$ sont nécessairement $a^m + ma^{m-1}x$, et que le reste du développement doit être de la forme indiquée ci-dessus, les coefficients A, B... étant indépendants de a et de x.

2° Soit maintenant m un nombre fractionnaire positif $\frac{p}{q}$, p

et q étant des entiers positifs. Dans ce cas on a

$$(a+x)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a+x)^p} = \sqrt[q]{a^p + pa^{p-1}x + \text{etc.}}$$

Or, si pour extraire la racine indiquée, on opère comme on l'a expliqué plus haut (189), on voit que les deux premiers termes sont nécessairement $a^{\frac{p}{q}} + pa^{\frac{p}{q}-1}x$, et que le reste du développement doit se trouver ordonné selon les puissances décroissantes de a. En outre, le polynôme étant homogène, la racine doit l'être également (190, 2°), et, par conséquent, être aussi ordonnée suivant les puissances croissantes de x. Donc le développement sera encore de la forme

$$(a+x)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} + \frac{p}{q}a^{\frac{p}{q}-1}x + \text{A}a^{\frac{p}{q}-2}x^2 + \text{B}a^{\frac{p}{q}-3}x^3 + \text{etc.},$$

comme dans le cas de l'exposant entier.

3° Soit enfin m un nombre négatif quelconque, entier ou fractionnaire. D'après ce qui précède on a

$$(a+x)^{-m} = \frac{1}{(a+x)^m} = \frac{1}{a^m + ma^{m-1}x + \text{etc.}},$$

et la division donne immédiatement le quotient indéfini

$$(a+x)^{-m} = a^{-m} - ma^{m-1}x + \text{A}a^{-m-2}x^2 + \text{etc.}$$

Donc, quel que soit l'exposant m, on aura toujours un développement de la forme indiquée ci-dessus (1°), où l'on connaît déjà les deux premiers termes.

Il s'agit maintenant de déterminer les coefficients A, B, etc.

La question sera évidemment résolue, si l'on détermine les coefficients H et K de deux termes consécutifs d'un rang quelconque dans le développement

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x \ldots + \text{H}a^{m-n}x^n + \text{K}a^{m-n-1}x^{n+1} + \text{etc.}$$

Or ces coefficients, étant indépendants de a et de x, resteront les mêmes, si l'on change x en $x+u$, ou a en $a+u$.

Il vient dans le premier cas

$$(1)\quad (a+x+u)^m = a^m + ma^{m-1}(x+u)\ldots$$
$$\ldots + \text{H}a^{m-n}(x+u)^n + \text{K}a^{m-n-1}(x+u)^{n+1} + \text{etc.},$$

et dans le second

$$(2)\quad (a+u+x)^m = (a+u)^m + m(a+u)^{m-1}\ldots$$
$$\ldots + \mathrm{H}(a+u)^{m-n}x^n + \mathrm{K}(a+u)^{m-n-1}x^{n+1} + \text{etc.}$$

Les premiers membres des équations (1) et (2) étant égaux, les seconds doivent l'être aussi, indépendamment de toute valeur particulière de x ou de u, et par conséquent si on les ordonne par rapport à u, ils devront être identiques.

Pour obtenir les multiplicateurs des diverses puissances de u, on aura des binômes à développer; mais comme on connaît les deux premiers termes de chacun d'eux, on pourra toujours, dans les équations (1) et (2), déterminer les multiplicateurs U et U′ de la première puissance de u. En effet, on aura

$$\mathrm{U} = ma^{m-1}\ldots + \mathrm{H}na^{m-n}x^{n-1} + \mathrm{K}(n+1)a^{m-n-1}x^n + \text{etc.},$$
$$\mathrm{U}' = ma^{m-1}\ldots + \mathrm{H}(m-n)a^{m-n-1}x^n + \mathrm{K}(m-n-1)a^{m-n-2}x^{n+1} + \text{etc.}$$

Or, U et U′ doivent être égaux, quel que soit x; donc les coefficients des mêmes puissances de x, par exemple de x^n, sont égaux. Ainsi

$$\mathrm{K}(n+1) = \mathrm{H}(m-n), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{H}(m-n)}{n+1}.$$

Il suit de là qu'en général on passe d'un coefficient quelconque au suivant d'après la même loi déjà trouvée (171, 4°) dans le cas de l'exposant entier positif, et que, par conséquent, on a toujours, quel que soit m, la formule établie (170)

$$(3)\quad (a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2 + \text{etc.},$$

et par suite

$$(4)\quad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \text{etc.}$$

C'est uniquement comme application de la méthode des coefficients indéterminés, que nous avons donné cette seconde démonstration de la formule du binôme, qui paraîtra peut-être plus simple que la première (427). Quant aux cas où la série se termine ou est convergente, nous renvoyons à ce qui a été dit plus haut (428).

445. La formule (3), qui fournit évidemment le développement en série de toute expression irrationnelle algébrique (au moins de la forme $\sqrt[m]{A}$), peut s'appliquer avec avantage sous la forme (4) aux extractions de racines des quantités numériques.

Supposons, par exemple, qu'on veuille calculer la racine n^e d'un nombre b; on posera $b = u \pm v$, u étant plus grand que v et en outre une puissance n^e exacte. Or $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}} = (u \pm v)^{\frac{1}{n}} = u^{\frac{1}{n}}\left(1 - \frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{n}}$; et comme la formule (4) donne le développement de $\left(1 \pm \frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{n}}$ en série convergente, $\frac{v}{u}$ étant < 1, on pourra toujours obtenir, pour cette expression, une valeur aussi approchée qu'on voudra, en prenant un nombre de termes convenable. Alors il faudra multiplier cette valeur approchée par la quantité rationnelle $u^{\frac{1}{n}}$. Quant aux limites de l'erreur que l'on commet en ne prenant qu'un nombre limité de termes, nous les avons données dans le n° 426, où les séries U″ et U‴ sont les développements de $(1 + x)^m$ et de $(1 - x)^m$.

Pour faciliter les applications, on remplace m par $\frac{1}{n}$ dans la formule (4), qui devient alors

$$(1 + x)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}x - \frac{(n-1)}{2.n^2}x^2 + \frac{(n-1)(2n-1)}{2.3.n^3}x^3 - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{2.3.4.n^4}x^4 + \text{etc.}$$

§ 4. *Applications aux expressions exponentielles et logarithmiques.*

446. Soit à développer a^x. Posons

$$a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.},$$

A, B, C,... étant des coefficients indépendants de x.

D'abord, si l'on fait $x = 0$, on trouve $A = a^0 = 1$. La série

devient donc

$$a^x = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

Pour déterminer les autres coefficients, prenons la propriété

$$a^x . a^u = a^{x+u}.$$

A cet effet, si dans la série on change successivement x en u, et x en $x+u$, il vient

$$a^u = 1 + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + \text{etc.}$$
$$a^{x+u} = 1 + B(x+u) + C(x+u)^2 + D(x+u)^3 + E(x+u)^4 + \text{etc.},$$

et alors, d'après la propriété indiquée, on doit avoir

$$1 + B(x+u) + C(x+u)^2 + D(x+u)^3 + E(x+u)^4 + \text{etc.} =$$
$$(1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.})(1 + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + \text{etc.}).$$

Or, si l'on effectue les opérations, et qu'on se borne, dans chaque membre, aux termes contenant la première puissance de u, on a deux polynômes en x, qui doivent être égaux, quel que soit x, et donnent l'égalité

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.} = B + B^2x + BCx^2 + BDx^3 + \text{etc.},$$

d'où $\quad 2C = B^2,\ 3D = BC,\ 4E = BD,\ \text{etc.},$

et par conséquent

$$C = \frac{B^2}{2},\quad D = \frac{B^3}{2.3},\quad E = \frac{B^4}{2.3.4},\ \text{etc.}$$

Par ces substitutions, la série devient

$$a^x = 1 + Bx + \frac{B^2x^2}{2} + \frac{B^3x^3}{2.3} + \frac{B^4x^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Le coefficient B, qui reste indéterminé, dépend de la base du système de logarithmes qu'on veut adopter. Comme B entre dans chaque terme avec un exposant égal à celui de x, si l'on fait $x = \frac{1}{B}$, il vient

$$a^{\frac{1}{B}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Le second nombre étant la base e du système de Néper, on

a donc $a^{\frac{1}{B}} = e$, d'où $a = e^{B}$, et $B = la$, la lettre l désignant les logarithmes népériens.

On obtient ainsi la même série trouvée plus haut (429, 1°)

$$a^x = 1 + xla + \frac{(xla)^2}{1.2} + \frac{(xla)^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

et par suite, en faisant $a = e$, d'où $la = 1$, on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

La formule $y = a^x = 1 + xla + \frac{(xla)^2}{1.2} +$ etc., donne le nombre y en fonction de son logarithme pris dans la base a.

Pour avoir y en fonction de son logarithme log. y pris dans une base quelconque, on remarque que l'équation $y = a^x$ donne log. $y = x$ log. a, d'où $x = \frac{\log. y}{\log. a}$, et par cette substitution la formule devient

$$y = a^x = 1 + \frac{la}{\log a} . \log . y + \frac{1}{2}\left(\frac{la}{\log a} . \log . y\right)^2 + \text{etc.}$$

447. Soit enfin à développer log. $(1 + x)$ pris dans un système quelconque. On ne cherche pas à développer log. x; car si l'on posait log. $x = A + Bx +$ etc., la valeur $x = 0$ donnerait $A = \log. 0 = -\infty$ (429, 2°). Posons donc

$$\log. (1 + x) = Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

Pour déterminer les coefficients, nous prendrons la propriété

$$\log. (a.b) = \log. a + \log. b.$$

A cet effet, si dans la série on change d'abord x en $x + u$, et comme $(1 + x + u) = (1 + x)\left(1 + \frac{u}{1+x}\right)$, si l'on change ensuite x en $\frac{u}{1 + x}$, il vient

$$\log. (1 + x + u) = B(x + u) + C(x + u)^2 + D(x + u)^3 + \text{etc.},$$

$$\text{og}\left(1 + \frac{u}{1 + x}\right) = B\left(\frac{u}{1 + x}\right) + C\left(\frac{u}{1+x}\right)^2 + D\left(\frac{u}{1+x}\right)^3 + \text{etc.}$$

Donc $\log(1+x)\left(1+\frac{u}{1+x}\right)$ ou $\log(1+x+u)=$

$$\log(1+x)+B\left(\frac{u}{1+x}\right)+C\left(\frac{u}{1+x}\right)^2+\text{etc.}$$

Les multiplicateurs des mêmes puissances de u, dans ces deux expressions de log. $(1+x+u)$, devant être égaux, on a

$$B+2Bx+3Dx^2+4Ex^3+\text{etc.}=\frac{B}{1+x},$$

d'où $(2C+B)x+(3D+2C)x^2+(4E+3D)x^3+\text{etc.}=0$,

quel que soit x, et par conséquent on a les relations

$$2C+B=0,\ 3D+2C=0,\ 4E+3D=0,\ \text{etc.},$$

qui donnent

$$C=-\frac{1}{2}B,\quad D=\frac{1}{3}B,\quad E=-\frac{1}{4}B,\ \text{etc.},$$

et par suite

$$\log(1+x)=B\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}\right).$$

Le coefficient B, qui reste indéterminé, dépend de la base qu'on veut adopter.

Ce qu'il y a de plus simple pour trouver sa valeur, est de faire $y=1+x$ dans la dernière formule du numéro précédent, et d'y remplacer log. $(1+x)$ par la valeur qu'on vient d'obtenir. On trouve alors

$$x=\frac{la}{\log a}.B\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{la}{\log a}\right)^2B^2\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\text{etc.}\right)^2+\text{etc.};$$

quel que soit x; donc $1=\frac{la}{\log.a}.B$, d'où $B=\frac{\log.a}{la}$. Mais l'équation $a=e^{la}$ donne log. $a=la$ log. e, d'où log. $e=\frac{\log.a}{la}$, et par suite $B=\log.e$. Le coefficient B est donc égal au module.

On a donc enfin

$$\log(1+x)=\log e\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}\right).$$

Voyez les formules plus convergentes au n° 430.

448. Lorsqu'on calcule, comme à l'ordinaire, le logarithme d'un nombre qui ne se trouve pas dans les tables, le résultat qu'on obtient se trouve affecté d'une petite erreur. Voici comment on peut calculer la limite de cette erreur.

Soit $a+x$ le nombre donné, a étant le nombre entier le plus voisin, et dont le logarithme est fourni par les tables. Représentons le module par M, la différence des tables par Δ, et l'erreur par ε.

On a $$\log(a+x)=\log\left[a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right]$$

$$=\log a+\text{M}\left(\frac{x}{a}-\frac{2a^2}{x^2}+\frac{3a^3}{x^3}-\text{etc.}\right),$$

et, en faisant $x=1$, il vient

$$\log(a+1)=\log a+\text{M}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{3a^3}-\text{etc.}\right).$$

Or, $\log.(a+1)=\log.a+\Delta$.

Donc $$\Delta=\text{M}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{3a^3}-\text{etc.}\right),$$

et $$\Delta x=\text{M}\left(\frac{x}{a}-\frac{x}{2a^2}+\frac{x}{3a^3}-\text{etc.}\right).$$

Dans l'usage des tables on emploie la formule

$$\log.(a+x)=\log.a+\Delta x,$$

tandis que la vraie valeur est

$$\log(a+x)=\log a+\text{M}\left(\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\text{etc.}\right).$$

Ainsi l'erreur est égale à la différence des seconds membres, et en mettant à Δx sa valeur, on a

$$\varepsilon=\text{M}\left[\left(\frac{x-x^2}{2a^2}\right)-\left(\frac{x-x^3}{3a^3}\right)+\left(\frac{x-x^4}{4a^4}\right)-\text{etc.}\right].$$

Mais x étant plus petit que 1, tandis que a est un nombre considérable, les termes de la valeur de ε diminuent très-rapidement; et comme ils sont d'ailleurs alternativement positifs et négatifs, l'erreur ε est nécessairement moindre que le premier terme $M\left(\frac{x-x^2}{2a^2}\right)$.

On a donc $$\varepsilon < \frac{Mx(1-x)}{2a^2}.$$

Or la plus grande valeur dont le numérateur soit susceptible a lieu lorsque $x=\frac{1}{2}$. Par conséquent la limite de l'erreur est $\frac{M}{8a^2}$.

Comme $\frac{M}{a}$ est à peu près égal à Δ, on peut aussi prendre $\frac{\Delta}{8a}$ pour la limite de l'erreur.

FIN.

Ks
HS

